ANALISIS DINAMIK ANTARA KONSUMSI DAN TABUNGAN DALAM WAKTU KONTINU

[1]Lian Aprianna, [2]Sudarwanto, dan [3]Vera Maya Santi

Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Negeri Jakarta
Jl. Pemuda No. 10 Rawamangun , Jakarta 13220

Email : [1]lianaprianna@gmail.com [2]vera_mayasanti@yahoo.co.uk

Abstrak. *Konsumsi merupakan salah satu masalah dalam bidang ekonomi di mana pilihan tingkat konsumsi masing-masing individu di tiap titik waktu akan mempengaruhi utilitas harapan yang direpresentasikan dengan tingkat kepuasan maksimum yang akan diperoleh. Pada skripsi ini, ada dua jenis konsumsi yaitu konsumsi di masa sekarang dan konsumsi di masa yang akan datang (tabungan). Untuk membuat keputusan optimal seringkali menemui beberapa kendala yaitu anggaran dan risiko. Berdasarkan analisis dinamik dengan prinsip maksimum, dapat diperoleh suatu solusi optimal untuk permasalahan optimisasi dinamis antara konsumsi dan tabungan dalam waktu kontinu di mana solusi yang diperoleh direpresentasikan dengan suatu jalur optimal.*

Kata kunci : *analisis dinamik, konsumsi, tabungan*

1. Pendahuluan

Optimisasi merupakan hal utama dari analisis ekonomi. Sejauh ini, alat yang dipelajari cenderung hanya untuk diaplikasikan pada masalah optimisasi statis. Pada awalnya dipilih satu atau lebih peubah yang nantinya akan berakhir pada pemaksimalan atau peminimalan sebuah fungsi tujuan yang dibatasi oleh satu atau lebih kendala. Penyelesaian untuk masalah seperti ini biasanya berupa nilai optimal tunggal untuk tiap peubah yang dipilih. Dalam optimisasi dinamis, hasil penyelesaiannya yang berupa bentuk jalur waktu diperoleh dari tiap peubah pilihan di tiap titik waktu dalam sebuah periode perencanaan tertentu, baik pada waktu diskrit maupun waktu kontinu. Seperti optimisasi statis, optimisasi dinamis juga dapat diaplikasikan dalam bidang ekonomi misalnya konsumsi dan investasi.

Konsumsi merupakan salah satu hal penting dari siklus hidup setiap individu sepanjang hidupnya. Untuk memperoleh kepuasan maksimum, setiap individu dapat menentukan tingkat konsumsi pada setiap waktunya. Penentuan tingkat konsumsi tersebut bergantung pada kekayaan yang dimiliki tiap individu. Oleh karena itu, individu selalu dihadapkan dengan masalah keputusan konsumsi untuk memenuhi kepuasan sekarang dan keputusan investasi yang nantinya untuk memenuhi konsumsi di masa yang akan datang. Dengan kata lain, individu harus membuat keputusan konsumsi dan investasi yang optimal.

Makalah ini akan membahas hubungan antara konsumsi dan tabungan, di mana tabungan merupakan salah satu contoh dari investasi, agar keduanya dapat berjalan beriringan dan memberikan hasil yang optimal dalam waktu kontinu.

2. Kajian Teori

2.1 Teori Kontrol Optimal

Dalam masalah optimisasi dinamis, terdapat suatu periode perencanaan yang bertujuan menemukan tindakan terbaik yang akan diambil sepanjang periode. Jadi, penyelesaian untuk setiap peubah akan mengambil bentuk suatu jalur waktu. Masalah yang paling sederhana dalam kontrol optimal dapat dinyatakan sebagai (Chiang, 2006) :

Memaksimalkan $\int_0^T f(a(t), c(t), t)dt$ … (1)

dengan kendala $\frac{d(a(t))}{dt} \equiv \dot{a}(t) = g(a(t), c(t), t)$ … (2)

$a(0) = A \quad a(T)\ bebas$ … (3)

dan $c(t) \in C$ atau semua $t \in [0, T]$ … (4)

Kunci dari teori kontrol optimal adalah prinsip maksimum yang merupakan syarat perlu agar tercapai jalur optimal. Pernyataan dari prinsip maksimum melibatkan suatu pendekatan yang serupa dengan fungsi Lagrangian dan peubah pengali Lagrange. Untuk masalah kontrol optimal dikenal sebagai fungsi Hamiltonian dan peubah *costate*.

Pada masalah diatas terdapat tiga peubah; waktu t, peubah state $a(t)$, dan peubah kontrol $c(t)$. Ada peubah baru yang dikenal sebagai peubah *costate* $\sigma(t)$. Seperti pengali Lagrange, peubah *costate* mengukur harga bayangan dari peubah state. Peubah *costate* diperkenalkan ke dalam masalah kontrol optimal melalui suatu fungsi Hamiltonian yang didefinisikan sebagai

$H(a(t), c(t), \sigma(t), t) \equiv f(a(t), c(t), t) + \sigma(t)g(a(t), c(t), t),$ … (5)

di mana H menunjukkan Hamiltonian dan merupakan fungsi dari empat peubah, yaitu $t, a(t), c(t), \sigma(t)$.

Berikut komponen-komponen dari prinsip maksimum yang harus dipenuhi agar keoptimalan tercapai:

(i) $H(a(t), c^*(t), \sigma(t), t) \geq H(a(t), c(t), \sigma(t), t)$ untuk semua $t \in [0, T]$ .... 6)

(ii) $\dot{a}(t) = \frac{\partial H}{\partial(\sigma(t))}$ persamaan *state* .... (7)

(iii) $\dot{a}(t) = -\frac{\partial H}{\partial(a(t))}$ persamaan *costate* .... (8)

(iv) $\sigma(T) = 0$ kondisi tranversalitas .... (9)

3. Pembahasan

Konsumsi merupakan hal penting bagi setiap individu sehingga sangat diperlukan suatu arus konsumsi yang dapat memaksimumkan tingkat kesejahteraan (kepuasan) individu di mana kepuasan individu dalam mengkonsumsi suatu barang diukur dengan suatu fungsi utilitas. Keputusan akan konsumsi tidak mulus begitu saja tetapi menemui beberapa kendala, misalkan keadaan keuangan individu. Mungkin menjadi lebih mudah bila hanya konsumsi di masa sekarang saja yang dipikirkan karena dengan menghabiskan semua aset yang ada maka akan didapatkan kepuasan maksimum tetapi tentu menjadi lebih rumit bila juga harus menentukan konsumsi di masa yang akan datang karena harus membagi anggaran antara konsumsi di masa sekarang dan di masa yang akan datang untuk memperoleh kepuasan. Untuk solusi masalah tersebut terlebih dahulu dibuat model matematisnya, yaitu model untuk fungsi tujuan dan kendalanya.

3.1 Pemodelan Untuk Fungsi Tujuan

Tingkat kepuasan individu yang diukur dengan fungsi utilitas $(u(c(t)))$ merupakan hal yang akan dimaksimumkan dalam masalah ini di mana fungsi utilitas menyatakan tingkat kepuasan individu dalam mengkonsumsi suatu barang dalam suatu periode waktu. Ada beberapa asumsi dari utilitas, yaitu *time separable* (Gollier, 2001), terdiferensialkan, dan cekung sempurna pada konsumsi $c(t)$. Dengan adanya risiko, individu diasumsikan memiliki preferensi utilitas harapan. Kecekungan fungsi utilitas pada konsumsi $c(t)$ dan adanya risiko berkaitan erat dengan sifat penghindaran risiko. Semakin cekung fungsi utilitas harapan, semakin individu menghindari risiko. Untuk mengukur penghindaran terhadap risiko digunakan suatu koefisien yang disebut dengan penghindaran risiko absolut, yaitu $A\big(c(t)\big) = -u''(c(t))/u'(c(t))$. Diasumsikan bahwa penghindaran risiko absolut menurun di tiap titik $A'(c(t)) < 0$. Penurunan penghindaran risiko absolut mengartikan bahwa sifat penghindaran risiko individu akan berkurang ketika individu lebih kaya. Selanjutnya, diasumsikan terdapat perubahan nilai (*discounting*) dari nilai sekarang terhadap nilai di masa yang akan datang. Adanya faktor diskonto menunjukkan nilai sekarang dari jumlah utilitas komoditas yang dikonsumsi pada masa yang akan datang. Dengan konstanta tingkat diskonto sebesar δ maka fungsi utilitas dapat dimodelkan sebagai $u\big(c(0)\big) = u\big(c(t)\big)e^{-\delta t}$, di mana u(c(0)) adalah nilai sekarang dari utilitas yang dinikmati pada waktu t dengan tingkat diskonto δ sehingga jumlah utilitas dengan tingkat diskonto δ dari t=0 sampai t=T adalah (Rusin, 2000) :

$$J = u\big(c(0)\big) + u\big(c(1)\big)e^{-\delta} + u\big(c(2)\big)e^{-2\delta} + \cdots + u\big(c(T)\big)e^{-T\delta},$$

dengan asumsi waktu kontinu maka

$$J = \int_0^T u\big(c(t)\big)e^{-\delta t}dt,$$

dengan adanya risiko maka akan digunakan fungsi utilitas harapan sebagai representasi preferensi individu. Pada fungsi utilitas harapan, setiap fungsi utilitas digabungkan dengan peluangnya

$$J = \int_0^T P(t)u\big(c(t)\big)e^{-\delta t}dt.$$

Diasumsikan terdapat dua *state*, yaitu *state* 1 dan *state* 2, dengan peluang kejadian $1-\pi(t)$ untuk *state* 1 dan $\pi(t)$ untuk *state* 2, di mana pada *state* 2 terjadi kerugian l dengan nilai l konstan untuk semua t. Hal ini konsisten dengan kejadian kerugian yang dibentuk dari waktu ke waktu berdasarkan proses Poisson sedemikian sehingga jumlah kejadian kerugian selama interval waktu yang berbeda (tidak berulang) adalah peubah acak independen, dan peluang dari dua atau lebih kerugian dalam suatu interval waktu dapat diabaikan selama panjang interval menjadi kecil. Sehingga fungsi tujuannya menjadi

$$J = \int_0^T\{\big(1-\pi(t)\big)u\big(c_1(t)\big)e^{-\delta t} + \pi(t)u\big(c_2(t)\big)e^{-\delta t}\}dt, \qquad \text{…. (10)}$$

di mana terdapat jalur optimal konsumsi terpisah untuk tiap *state*, individu akan memilih $c_1(t)$ jika *state* 1 terjadi dan $c_2(t)$ jika *state* 2 terjadi. Permasalahan dibatasi dengan waktu akhir T yang telah ditetapkan dan hinga dengan target aset $a(0) = a(T) = 0$.

3.2 Pemodelan Untuk Fungsi Kendala

Pendapatan individu yaitu $y(t)$ merupakan peubah eksogen dan diasumsikan konstan untuk semua t, sedangkan aset bersih (pengakumulasian tabungan atau hutang) ditunjukkan dengan $a(t)$. Total pendapatan berih dinyatakan dengan $y(t) + ra(t)$, di mana r adalah konstanta tingkat bunga bebas risiko yang dibayarkan atau diterima. Persamaan gerak aset ketika keadaan tanpa risiko adalah

$$\dot{a}(t) = y + ra(t) - c(t). \quad \text{.... (11)}$$

Dengan adanya risiko, persamaan gerak aset menjadi:

$$\dot{a}_1(t) = y + ra(t) - c_1(t), \quad \text{.... (12)}$$

$$\dot{a}_2(t) = y + ra(t) - l - c_2(t), \quad \text{.... (13)}$$

karena jalur optimal adalah untuk mencapai tingkat aset di waktu akhir $a(T)$ yang telah diberikan, maka $\dot{a}_1(t) = \dot{a}_2(t)$ untuk semua t. Dari pemodelan fungsi tujuan, fungsi kendala, dan syarat awal serta syarat batasnya maka masalah maksimisasi utilitas harapan ini dapat dinyatakan sebagai berikut:

Memaksimalkan $J = \int_0^T \{(1-\pi(t))u(c_1(t))e^{-\delta t} + \pi(t)u(c_2(t))e^{-\delta t}\}dt$ .... (14)

dengan kendala $\dot{a}_1(t) = y + ra(t) - c_1(t)$ .... (15)

$\dot{a}_2(t) = y + ra(t) - l - c_2(t)$ .... (16)

dengan $a(0) = 0 \qquad a(T) = 0$ .... (17)

di mana $\pi(t)$ peluang terjadinya kerugian pada waktu t;

$(1-\pi(t))$ peluang kerugian tidak terjadi pada waktu t;

$u(c_i(t))$ utilitas konsumsi pada waktu t di *state* i, i=1,2;

$c_i(t)$ arus konsumsi pada waktu t di *state* i, i=1,2;

δ konstanta tingkat diskonto; r konstanta tingkat bunga;

y konstanta pendapatan; l konstanta kerugian.

3.3 Penentuan Jalur Optimal

Pemodelan yang telah ditentukan akan diselesaikan dengan teknik kontrol optimal dengan $c_1(t)$ dan $c_2(t)$ sebagai peubah kontrol dan $a(t)$ peubah *state*. Berdasarkan persamaan (12) dan (13), maka diperoleh $c_2(t) = c_1(t) - l$, sehingga $\dot{c}_1(t) = \dot{c}_1(t) = \dot{c}(t)$ untuk semua t. Hamiltoniannya adalah

$$H = (1-\pi(t))u(c_1(t))e^{-\delta t} + \pi(t)u(c_2(t))e^{-\delta t} + \sigma(t)(y + ra(t) - c_1(t)) \quad (18)$$

Prinsip maksimum merupakan sejumlah kondisi perlu yang tetap berada pada jalur optimal. Prinsip maksimum memiliki empat komponen, ditunjukkan dengan persamaan (6), (7), (8), dan (9). Kondisi (i) yaitu persamaan (6) adalah pemaksimalan H (persamaan (18)) terhadap $c_1(t)$, dengan $c_2(t) = c_1(t) - l$. Berikut uraiannya:

$$(1-\pi(t))u'(c_1(t))e^{-\delta t} + \pi(t)u'(c_2(t))e^{-\delta t} - \sigma(t) = 0 \quad \text{.... (19)}$$

Kemudian kondisi (ii) yaitu persamaan (7) adalah pemaksimalan (persamaan (18)) terhadap $\sigma(t)$. Kondisi (ii) disebut dengan persamaan *state*:

$$\dot{a}(t) = y + ra(t) - c_1(t) \quad \text{.... (20)}$$

Kemudian kondisi (iii) yaitu persamaan (8) adalah pemaksimalan (persamaan (18)) terhadap $a(t)$. Kondisi (iii) disebut dengan persamaan *costate*:

$$\dot{\sigma}(t) = -\sigma(t)r \quad \text{.... (21)}$$

Karena keadaan dan waktu akhir tetap (telah diketahui) maka tidak ada kondisi transversalitas yang diperlukan sehingga kondisi (iv) yaitu persamaan (9) tidak diperlukan. Langkah selanjutnya adalah menyelesaikan sistem persamaan diferensial yang telah diperoleh. Untuk keadaan bebas risiko diperoleh jalur optimal konsumsi sebagai berikut:

$$\dot{c}(t) = \frac{(r-\delta)}{A(c(t))} \quad \text{.... (22)}$$

$$c(t) = c(0)e^{(r-\delta)\int \frac{1}{R(c(t))}dt}, \quad \text{.... (23)}$$

di mana $R(c(t))$ adalah elastisitas utilitas marjinal dan $c(0)$ bergantung pada kondisi awal, nilai parameter, dan berbanding terbalik dengan nilai $r-\delta$. Dari persamaan (11) maka diperoleh jalur optimal aset sebagai berikut:

$$a(t) = e^{rt}\left(B + \int\left(y - c(t)\right)dt\right) \quad \text{…. (24)}$$

di mana B adalah konstanta sembarang.

Untuk keadaan dengan risiko, jalur optimal konsumsinya sebagai berikut:

$$\dot{c}(t) = \frac{(r-\delta)}{A(c(t))} + l\dot{\pi}(t) \quad \text{…. (25)}$$

$$c_i(t) = e^{(r-\delta)\int\frac{1}{R(c(t))}dt}\left(B_i + \int l\dot{\pi}(t)e^{(\delta-r)\int\frac{1}{R(c(t))}dt}\,dt\right),\quad i=1{,}2 \quad \text{…. (26)}$$

Jika $r=\delta$ maka persamaan (25) menjadi

$$\dot{c}(t) = l\dot{\pi}(t) \quad \text{…. (27)}$$

$$c_i(t) = l\pi(t) + B_i,\quad i = 1{,}2 \quad \text{…. (28)}$$

Karena $c_2(t) = c_1(t) - l$ maka perhatian hanya perlu difokuskan pada $c_1(t)$. Jelas

$$B_1 = c_1(0) - l\pi_0 \quad \text{…. (29)}$$

di mana $\pi(0) = \pi_0$, dan tabungan diketahui sebagai: $\dot{a}(t) - ra(t) = y - c_1(t)$

Dengan persamaan (28) dan (29) maka tabungan menjadi

$$\dot{a}(t) - ra(t) = y - l\pi(t) - c_1(0) - l\pi_0 \quad \text{…. (30)}$$

Jika dibuat suatu asumsi yang mendekati bentuk $\pi(t)$ maka memperjelas ke penyelesaian eksplisit untuk jalur optimal. Misal

$$\pi(t) = \pi_0 + (\pi_T - \pi_0)\frac{t}{T} \quad \text{….(31)}$$

Jika persamaan (29) dan (31) disubstitusikan ke persamaan (28) ketika $i=1$ maka akan menjadi

$$c_1(t) = c_1(0) + \Pi t \quad \text{…. (32)}$$

di mana $\Pi = \left(\frac{l(\pi_T-\pi_0)}{T}\right)$. Dari persamaan (32) dan (30) maka diperoleh

$$\dot{a}(t) - ra(t) = y - c_1(0) - \Pi t \quad \text{…. (33)}$$

sehingga diperolah solusi

$$a(t) = \mathrm{B}e^{rt} - \left(\frac{y-c_1(0)}{r}\right) + \Pi\left(\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{r}} + \frac{1}{\mathrm{r}^2}\right) \quad \text{…. (34)}$$

Dengan asumsi $a(0) = a(T) = 0$ maka diperoleh

$$B = \frac{\Pi T}{r(1-e^{rT})} = \frac{l(\pi_T-\pi_0)}{r(1-e^{rT})} \quad \text{…. (35)}$$

Dari persamaan (34) maka

$$\dot{a}(t) = rBe^{rt} + \frac{\Pi}{r}$$

Persamaan (34) merupakan jalur optimal aset untuk keadaan dengan risiko.

3.4 Contoh Kasus

Misal seorang individu dengan pendapatan sebesar $Rp\ 3.000.000,-$ dihadapkan dengan suatu kondisi tidak pasti yaitu state 1 dan state 2 dengan peluang masing-masing $(1-\pi(t))$ dan $\pi(t)$ di mana pada state 2 terjadi kerugian sebesar $Rp\ 2.000.000,-$. Individu tersebut ingin memaksimalisasi utilitas harapannya dengan utilitas vNM nya adalah $u(c(t)) = ln(c(t))$ dengan periode waktu 12 bulan. Tentukan jalur optimal bila diketahui tingkat bunga (r) dan tingkat diskontonya (δ) masing-masing adalah

(a) $r = 10\%$, $\delta = 10\%$; (b) $r = 12\%$, $\delta = 15\%$; (c) $r = 15\%$, $\delta = 12\%$.

diketahui peluang kerugian di awal periode (π_0) dan peluang kerugian di akhir periode (π_T) adalah:

(1) $\pi_0 = 0{,}001$ dan $\pi_T = 0{,}1$; (2) $\pi_0 = 0{,}1$ dan $\pi_T = 0{,}001$.

Solusi

(a) $r = \delta$

Untuk keadaan bebas risiko:

$c(t) = 3.000.000$; $a(t) = 0$; $\dot{a}(t) - ra(t) = 0$

Untuk keadaan dengan risiko

(1) $\pi_T > \pi_0$

$c_1(t) = 16.500t + 2.920.340$

$c_2(t) = 16.500t + 920.340$

$a(t) = -853.405\, e^{0,1t} + 853.405 + 165.000t$

$\dot{a}(t) - ra(t) = 79.659 - 16.500t$

(2) $\pi_T < \pi_0$

$c_1(t) = -16.500t + 3.070.790$

$c_2(t) = -16.500t + 1.070.790$

$a(t) = 853.405\, e^{0,1t} - 853.405 - 165.000t$

$\dot{a}(t) - ra(t) = -79.659 + 16.500t$

(b) $r < \delta$

Untuk keadaan bebas risiko:

$c(t) = 3.428.200\, e^{-0,03t}$

$a(t) = -25.000.000 + 2.145.340\, e^{0,12t} + 22.854.700\, e^{-0,03t}$

$\dot{a}(t) - ra(t) = 3.000.000 - 3.428.200\, e^{-0,03t}$

Untuk keadaan dengan risiko

(1) $\pi_T > \pi_0$

$c_1(t) = 2.373.977\, e^{-0,03t} + 550.000$

$c_2(t) = 2.373.977\, e^{-0,03t} - 1.450.000$

$a(t) = -512.312\, e^{0,12t} + 512.312 + 137.500t$

$\dot{a}(t) - ra(t) = 76.023 - 16.500t$

(2) $\pi_T < \pi_0$

$c_1(t) = 3.626.020\, e^{-0,03t} - 550.000$

$c_2(t) = 3.626.020\, e^{-0,03t} - 2.550.000$

$a(t) = 512.312\, e^{0,12t} - 512.312 - 137.500t$

$\dot{a}(t) - ra(t) = -76.023 + 16.500t$

(c) $r > \delta$

Untuk keadaan bebas risiko:

$c(t) = 2.625.290\, e^{0,03t}$

$a(t) = -20.000.000 - 1.877.380\, e^{0,15t} + 21.877.400\, e^{0,03t}$

$\dot{a}(t) - ra(t) = 3.000.000 - 2.625.290\, e^{-0,03t}$

Untuk keadaan dengan risiko

(1) $\pi_T > \pi_0$

$c_1(t) = 3.479.210\, e^{0,03t} - 550.000$

$c_2(t) = 3.479.210\, e^{0,03t} - 2.550.000$

$a(t) = -261.404\, e^{0,15t} - 261.404 - 110.000t$

$\dot{a}(t) - ra(t) = 70.789 - 16.500t$

(2) $\pi_T < \pi_0$

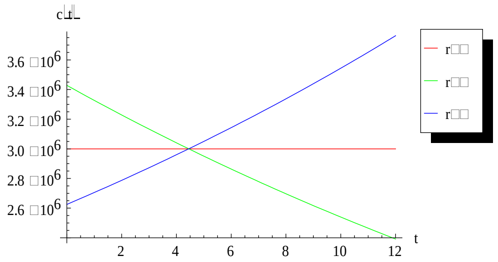
$c_1(t) = 2.520.729\, e^{0,03t} + 550.000$

$c_2(t) = 2.520.729\, e^{0,03t} - 1.450.000$

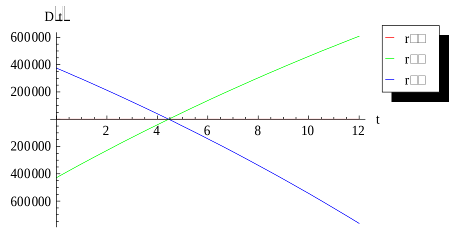
$a(t) = 261.404\, e^{0,15t} + 261.404 - 110.000t$

$\dot{a}(t) - ra(t) = -70.789 + 16.500t$

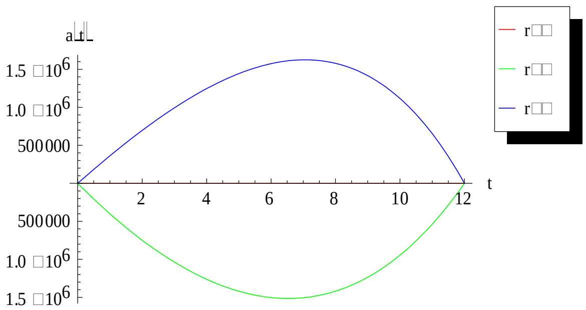
Dengan menerapkan sistem persamaan diferensial yang telah diperoleh pada *software* Mathematica 7, akan didapatkan sebuah solusi yang apabila digambarkan dengan grafik adalah sebagai berikut. Pertama, jalur optimal untuk keadaan ketika bebas risiko (Gambar (1)):



(a)



(b)

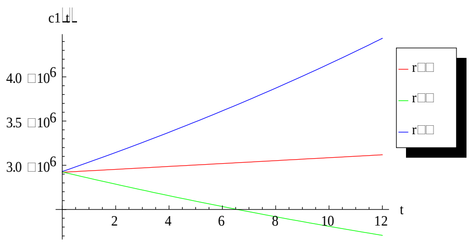


(c)

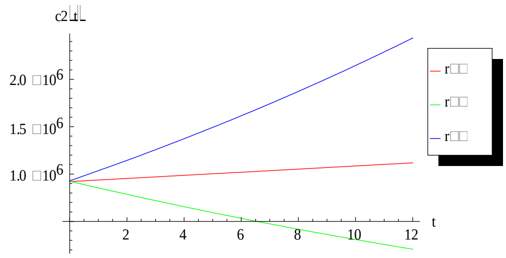
Gambar 1. Kasus ketika bebas risiko: (a) jalur optimal konsumsi; (b) jalur optimal tabungan, dan (c) jalur optimal aset.

Kedua, jalur optimal untuk keadaan ketika ada risiko (Gambar(2) dan Gambar(3)):

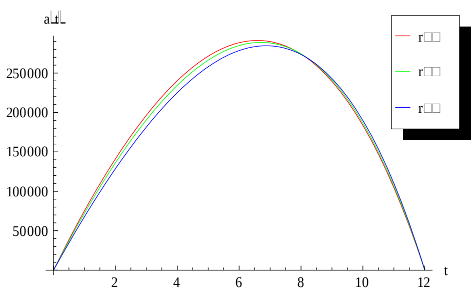
(1) $\pi_T > \pi_0$



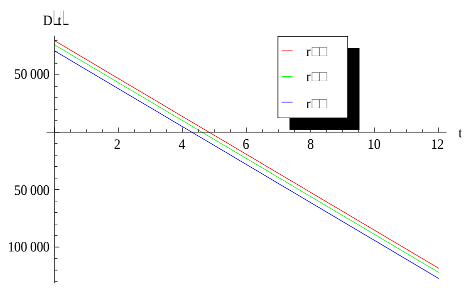
(a)



(b)



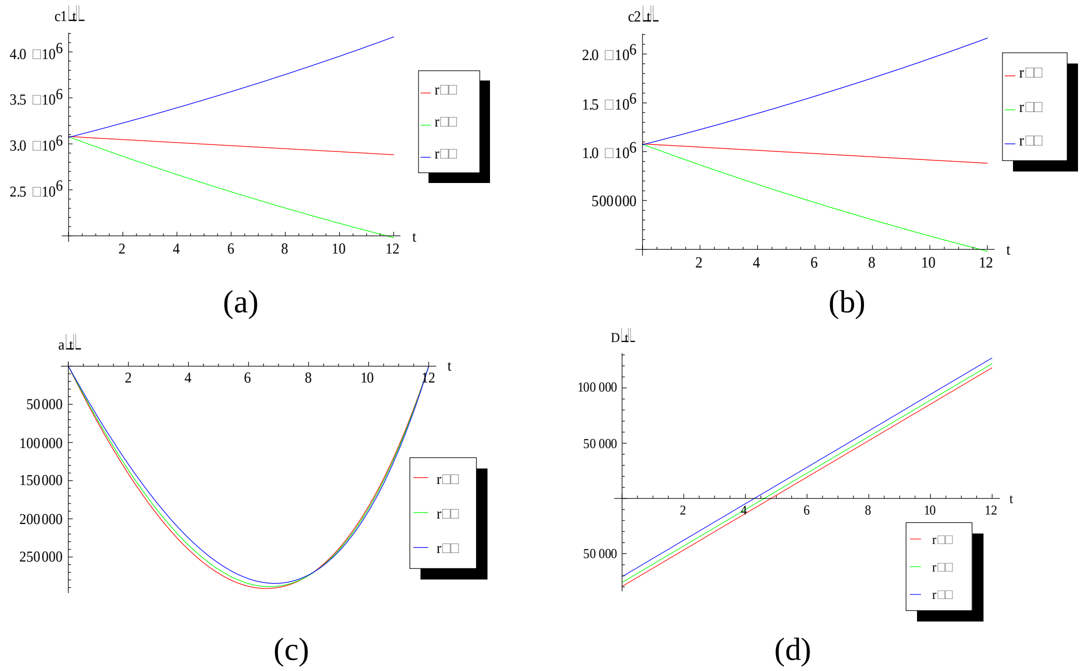
(c)



(d)

Gambar 2. Kasus ketika ada risiko dan $\pi_T > \pi_0$: (a) jalur optimal konsumsi *state* 1; (b) jalur optimal konsumsi *state* 2; (c) jalur optimal aset; dan (d) jalur optimal tabungan pencegahan.

(2) $\pi_T < \pi_0$



Gambar 3. Kasus ketika ada risiko dan $\pi_T < \pi_0$: (a) jalur optimal konsumsi *state* 1; (b) jalur optimal konsumsi *state* 2; (c) jalur optimal aset; dan (d) jalur optimal tabungan pencegahan.

4. Kesimpulan

Jalur optimal terbagi menjadi dua keadaan, yaitu ketika bebas resiko dan ketika ada resiko. Untuk keadaan bebas resiko, jika r = δ tingkat konsumsi sama dengan tingkat pendapatan dan konstan ditiap titik waktu sehingga tidak ada tabungan ataupun pinjaman yang dilakukan. Jika r < δ, tingkat konsumsi lebih dari tingkat pendapatan diawal periode dan kurang dari tingkat pendapatan diakhir periode dengan melakukan pinjaman diawal periode diikuti dengan pembayaran pinjaman dari waktu ke waktu hingga periode berakhir. Jika r > δ, tingkat konsumsi kurang dari pendapatan diawal periode dan lebih dari tingkat pendapatan diakhir periode dengan menabung diawal periode kemudian melakukan *dissaving*. Untuk keadaan dengan resiko, pertumbuhan peluang kerugian menentukan motif untuk menabung diawal periode dan penurunan peluang kerugian menentukan motif untuk melakukan pinjaman diawal periode.

5. Daftar Pustaka

Chiang, Alpha C. 2006. *Dasar-dasar Matematika Ekonomi*. Ed ke-4. Erlangga, Jakarta

Gollier, Christian. 2001. *The Economics of Risk and Time*. MIT Press, London.

Rusin, Rahmi. 2000. *Aplikasi Kalkulus Variasi dan Kontrol Optimal pada Optimal Economic Growth Problem*. Skripsi. Jurusan Matematika FMIPA UI.

Somerville, R. A. 2004. *Insurance, Consumption, and Saving: A Dynamic Analysis in Continuous Time*. The American Economic Review, Vol. 94.