MODEL PERDAGANGAN SEKURITAS MULTI PERIODE

[1]Endah Setyoningrum, [2]Suyono, dan [3]Yudi Mahatma

[1,2,3]Jurusan Matematika FMIPA UNJ
E-mail : e_s_1602@yahoo.co.id

Abstrak. *Investasi keuangan banyak digunakan dalam perekonomian modern. Investasi keuangan berkaitan dengan kondisi ekonomi yang sedang terjadi dan informasi-informasi sekuritas. Dalam skripsi ini akan dijelaskan model perdagangan sekuritas yang juga berhubungan dengan investasi keuangan pada multi periode. Pada model ini diberlakukan aturan The Law of one Price dan diasumsikan pasar bebas arbitrase, agar tercapai harga fair sekuritas. Beberapa strategi perdagangan juga disajikan untuk melengkapi model perdagangan sekuritas, yaitu attainable claim, self-financing dan replikasi portofolio, yang dapat digunakan untuk mencapai keuntungan yang maksimal dari sekuritas yang diinvestasikan.*

Kata kunci : *Perdagangan sekuritas, pasar bebas arbitrase, The Law of one price, Self-Financing, Replikasi Portofolio.*

1. Pendahuluan

Dewasa ini banyak negara yang menetapkan kebijakan yang bertujuan untuk meningkatkan investasi baik domestik ataupun modal asing. Hal ini dilakukan oleh pemerintah sebab kegiatan investasi akan mendorong kegiatan ekonomi suatu negara, penyerapan tenaga kerja, peningkatan output yang dihasilkan, penghematan atau penambahan devisa.

Investasi dapat berupa penanaman modal untuk satu atau lebih aktiva yang dimiliki dan biasanya berjangka waktu lama dengan harapan mendapatkan keuntungan di masa-masa yang akan datang. Produk investasi dikenal sebagai efek atau sekuritas. Sekuritas adalah kontrak keuangan yang dimiliki holder yang memuat pola pembayaran *contingent claim* pada masa yang akan datang pada kondisi yang sedang terjadi pada waktu yang disepakati (P.K. Medina & Sandro Merino, 2003).

Suatu rencana investasi perlu dianalisis secara seksama, terutama pada model investasi yang digunakan. Pembahasan investasi pada skripsi ini terbatas pada model perdagangan sekuritas. Model perdagangan sekuritas berkaitan dengan strategi perdagangan yang digunakan. Strategi perdagangan sekuritas adalah salah satu yang dipelajari dalam teknik keuangan *financial engineering*, yang bertujuan memaksimalkan potensi keuangan dari sekuritas yang diinvestasikan. Dengan strategi ini diketahui cara membentuk sekuritas-sekuritas baru dari sekuritas dasar yang ada pada multi periode yang memiliki waktu transaksi pada $t = 0, 1, 2, \ldots, T$. Ini merupakan pengembangan dari model perdagangan sekuritas pada satu periode yang memiliki waktu transaksi pada t = 0 (awal investasi) dan t = 1 (akhir investasi). Strategi-strategi yang digunakan pada model perdagangan sekuritas adalah *attainable claim*, *self-financing* dan *replicating portfolio* dengan mensyaratkan tidak terdapat arbitrase dalam pasar sekuritas (Pablo K.M. & Sandro Merino, 2003).

Penulis-penulis sebelumnya telah membahas strategi perdagangan sekuritas pada satu periode, salah satunya pada literatur yang ditulis oleh Knight [1921]; Bewley [1988]; Machina [1982]; Blume, Brandenburger & Dekel [1991] dan Fishburn [1988]. Perdagangan sekuritas pada multi periode dijelaskan oleh Duesenberry [1949], Pollak [1970] dan Abel [1990] (Philip Dybvig & Stephen A. Ross, 2003). Literatur tentang *contingent claim* telah ditulis oleh J.M. Harrison & D.M. Kreps [1979] dan Harrison.

2. Landasan Teori

A. Elemen Model Perdagangan Sekuritas Satu Periode

Aktivitas ekonomi model ini menggunakan dua keadaan, waktu pada saat ini dinotasikan dengan $t = 0$ dan waktu yang akan datang dinotasikan dengan $t = 1$. Keadaan ekonomi pada waktu $t = 0$ dianggap diketahui, sedangkan keadaan ekonomi pada waktu $t = 1$ dianggap berada dalam n kemungkinan kondisi yang berbeda yang ditulis sebagai $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$. Jadi ruang sampel keadaannya adalah

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$$

Peluang kejadian ω_i pada waktu $t = 1$ akan dinotasikan dengan $p_i = P(\omega_i)$.

B. *Attainabilitas* dan Replikasi

Sebuah alternatif adalah suatu pola pembayaran yang bernilai positif atau negatif pada waktu $t = 1$ yang bergantung pada kondisi ekonomi yang terjadi. Sebuah alternatif dapat disajikan dengan nilai payoff-nya, yang merupakan variabel acak $\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, dimana $X(\omega)$ adalah pembayaran yang dilakukan jika keadaan yang terjadi adalah ω. Ruang alternatif ditulis sebagai $\mathcal{A} = L(\Omega)$. Ruang alternatif dapat diinterpretasikan sebagai ruang seluruh kontrak keuangan yang jatuh tempo pada waktu $t = 1$. Sebuah *contingent claim*, atau seringkali disebut dengan klaim saja, adalah sebarang alternatif yang bernilai positif, yakni alternatif X, dimana $X \geq 0$. Himpunan

$$\mathcal{A}^+ := \{X \in \mathcal{A}; X \geq 0\}$$

adalah himpunan *contingent claim*.

Sekuritas

Dalam model ekonomi yang akan dibahas, dianggap ada *N+1 contingent claim* tidak nol yang akan diperdagangkan, yang dapat dibeli dan dijual dengan harga pasar. *Contingent claim* ini dinamakan sekuritas dasar atau sekuritas. Pasar akan dapat dijelaskan jika untuk setiap sekuritas yang diperdagangkan ditetapkan payoff-nya, yakni $S_1 : \Omega \to \mathbb{R}$ pada waktu $t = 1$, dan ditetapkan harganya pada waktu $t = 0$, $S_0 > 0$. Kondisi kedua dibutuhkan, karena sekuritas harus memiliki payoff positif. Jika keadaannya ω pada waktu $t = 1$ maka sekuritas akan bernilai $S_1(\omega)$. Oleh karena itu jika investor harus menjual sekuritas pada waktu $t = 1$, maka harganya akan sama dengan $S_1(\omega)$. Untuk selanjutnya payoff dari sekuritas pada waktu $t = 1$

akan dinotasikan dengan S_1 dan notasi $(S_t)_{t\in\{0,1\}}$ menyatakan proses harga pada sekuritas.

- Sekuritas Bebas Resiko
  Harga sekuritas bebas resiko atau rekening tabungan bank pada waktu *t* akan ditulis dengan $S_t^0 : \Omega \to \mathbb{R}$. Akan diasumsikan $S_t^0(\omega) = S_0^0(1+r)^t$, dimana suku bunga bebas resiko $r > -1$ bersifat konstan dan $S_0^0 > 0$.
- Sekuritas Beresiko
  Harga pada waktu *t* dari *N* sekuritas akan dituliskan dengan
  $$S_t^1, S_t^2, \dots, S_t^N$$
  Harga-harga sekuritas tersebut merupakan variabel-variabel acak dari $\Omega \to \mathbb{R}$.

Sekuritas dasar *Non-Redundant*

Sekuritas dasar ke-*j* dikatakan redundant jika payoff-nya bergantung linier pada sekuritas dasar yang lain, yaitu untuk suatu $i \neq j$ terdapat $\lambda_i \in \mathbb{R}$ sedemikian hingga

$$S_i^j = \sum_{i\neq j} \lambda_i\, S_1^i$$

Karena dimensi $\mathcal{A}$ sama dengan *n* maka jika diasumsikan tidak ada sekuritas yang *redundant* maka banyaknya sekuritas *non-redundant* tidak lebih besar dari banyaknya kemungkinan keadaan ω , yakni $n \geq N + 1$.

Asumsi Pasar

Pada model pasar ini, diasumsikan bahwa :

- Sekuritas dapat diperdagangkan dengan jumlah yang sebarang.
- Tidak ada arbitrase di pasar, yaitu tidak ada kemungkinan untuk mendapat keuntungan tanpa modal.
- Peminjaman dan *short-selling* sekuritas diperbolehkan. *Short selling* yang dimaksud adalah meminjam sekuritas untuk dijual dan mengembalikannya pada waktu yang akan datang.
- Investor bertransaksi pada waktu *t = 0* dan mencairkan investasinya pada waktu *t = 1*.

Portofolio

Dalam model ini, sebuah portofolio dari sekuritas dapat disajikan dengan

$$\mathbf{\Phi} = (\phi^0, \phi^1, \dots, \phi^N) \in \mathbb{R}^{N+1}$$

dimana ϕ^0 adalah jumlah unit dari *zero-bond* dan $\phi^j, j = 1, \dots, N$ merupakan jumlah unit dari sekuritas yang terkandung dalam portofolio.

Nilai Awal Portofolio

Nilai awal portofolio $\mathbf{\Phi}$ diberikan oleh

$$V_0[\mathbf{\Phi}](\omega) = \phi^0 S_0^0(\omega) + \phi^1 S_0^1(\omega) + \cdots + \phi^N S_0^N(\omega), \text{ untuk semua } \omega \in \Omega$$

Nilai Akhir Portofolio

Nilai akhir portofolio $\mathbf{\Phi}$ diberikan oleh

$$\begin{aligned} V_1[\mathbf{\Phi}](\omega) &= \phi^0 S_1^0(\omega) + \phi^1 S_1^1(\omega) + \cdots + \phi^N S_1^N(\omega) \\ &= \phi^0 S_0^0(1+r) + \phi^1 S_1^1(\omega) + \cdots + \phi^N S_1^N(\omega), \text{ untuk semua } \omega \in \Omega \end{aligned}$$

Pada nilai awal dan akhir portofolio berlaku operasi inier.
Alternatif X dikatakan attainable jika bisa ditemukan portofolio **Φ** sedemikian hingga

$$V_1[\mathbf{\Phi}] = X$$

Portofolio **Φ** juga disebut *replicating portfolio.* Alternatif-alternatif yang attainable dapat dibuat dengan membentuk replikasi portofolio yang sesuai dari sekuritas-sekuritas dasar yang diperdagangkan di pasar.

Teorema 2.1 *Setiap alternatif yang attainable X memiliki replikasi portofolio **Φ** yang tunggal jika dan hanya jika sekuritas-sekuritas dasar non-redundant. Jika terdapat sekuritas dasar redundant, maka setiap alternatif attainable dapat direplikasi sampai tak hingga.*

C. *The Law of One Price* dan Fungsional Harga Linier

The Law of One Price berlaku dalam pasar, yakni ketika untuk sebarang alternatif, semua portofolio yang mereplikasi memiliki nilai awal yang sama.

Lemma 2.2 *The Law of One Price berlaku jika dan hanya jika sebarang portofolio yang mereplikasi zero-claim memiliki nilai awal nol, yaitu untuk portofolio **Φ** dengan*
$V_1[\boldsymbol{\Phi}] = 0$ *mengakibatkan* $V_0[\boldsymbol{\Phi}] = 0$

Proposisi 2.3 *Salah satu sifat berikut berlaku :*

1. *The Law of One Price berlaku untuk alternatif dengan batas waktu S*
2. *Untuk sebarang alternatif attainable dan suatu bilangan riil* $\lambda \in \mathbb{R}$, *dapat ditemukan replikasi portofolio untuk X dengan nilai awal* $V_0(X) = \lambda$.

Jika *The Law of One Price* berlaku dalam pasar, maka dapat dicari harga fair dari alternatif yang dinotasikan dengan $\pi_0(X) = V_0(\Phi)$ Nilai yang fair adalah sejumlah uang yang dibutuhkan untuk menyusun portofolio yang mereplikasi. Yang disebut juga sebagai fungsional harga. Jika diasumsikan bahwa terdapat sekuritas dasar *non-redundant*, maka akan terdapat alternatif yang tereplikasi secara unik dan *Law of One Price* terpenuh dengan sendirinya.

Teorema 2.4 *Anggap bahwa Law of One Price berlaku, maka* $\pi_0 \colon \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ *adalah fungsional linier.*

D. Arbitrase dan Fungsi Harga Positif

Sebuah arbitrage opportunities atau arbitrase adalah sebuah portofolio **Φ** sedemikian hingga

- $\mathrm{V}_0[\mathbf{\Phi}] = 0$, yakni **Φ** adalah portofolio berharga nol
- $\mathrm{V}_1[\mathbf{\Phi}] > 0$, yakni **Φ** memiliki payoff positif

Lemma 2.5 *Anggap pasar tidak mengandung aribtrase. Maka, The Law of One Price berlaku di dalam pasar tersebut.*

Proposisi 2.6 *Pasar tidak mengandung arbitrase jika dan hanya jika* $V_0[\boldsymbol{\Phi}] > 0$ *berlaku untuk portofolio **Φ** yang memiliki nilai akhir* $V_1[\boldsymbol{\Phi}]$ *positif.*

Akibat dari proposisi di atas adalah pasar yang bebas arbitrase sangat memiliki contingent claim yang bernilai positif, berarti claim yang bernilai positif memberikan holder keuntungan pada beberapa (atau semua) keadaan tanpa kerugian untuk setiap keadaan.

Akibat 2.7 *Anggap semua portofolio yang mereplikasi zero-claim yang memiliki nilai awal nol, sehingga fungsi harga* $\pi_0 : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ *ada. Maka* π_0 *bernilai positif jika dan hanya jika tidak ada arbitrase.*

E. Pasar Lengkap dan Sekuritas *Arrow-Debreu*

Pasar dikatakan lengkap (*complete*) jika semua alternatifnya *attainable*, yakni jika sebarang alternatif dapat direplikasi oleh portofolio yang sesuai.

Sekuritas *Arrow-Debreu*

Untuk $1 \leq j \leq n$, sekuritas *Arrow-Debreu* ke-j didefinisikan sebagai *contingent claim* yang membayar sebesar satu rupiah, jika keadaan yang terjadi adalah ω_j dan akan membayar sebesar nol untuk keadaan selainnya. Ini merupakan fungsi indikator yang mendeteksi elemen kejadian $\{\omega_j\}$. Jika ini dinyatakan dengan E_j, maka $E_j = 1_{\{\omega_j\}}, j = 1, \dots, n$

Himpunan sekuritas-sekuritas *Arrow-Debreu* adalah basis ruang vektor untuk ruang alternatif, yaitu untuk setiap $X \in \mathcal{A}$ terdapat n-tuple $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}^n$ yang tunggal sedemikian hingga berlaku : $X = \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \cdots + \lambda_n E_n$, dimana $\lambda_i = X(\omega_i)$

Lemma 2.8 *Pernyataan-pernyataan berikut ekuivalen :*

1. *Pasar lengkap*
2. *Setiap contingent claim adalah attainable*
3. *Setiap sekuritas Arrow-Debreu adalah attainable*

Proposisi 2.9 *Misalkan* $S_1^0, S_1^1, \dots, S_1^N$ *adalah sekuritas dan ruang alternatif* $\mathcal{A}$ *berdimensi* n*. Pasar dikatakan lengkap jika dan hanya jika* $N + 1 \geq n$ *dan terdapat* n *sekuritas dengan payoff-payoff-nya bersifat bebas linier. Dalam kasus sekuritas dasar non-redundant, pasar dikatakan lengkap jika dan hanya jika* $n = N + 1$.

3. Model Perdagangan Sekuritas Multi Periode

A. Elemen Model Perdagangan Sekuritas Multi Periode

Aktivitas ekonomi yang akan dibahas menggunakan model multi periode yang dimulai pada waktu $t = 0$ dan diakhiri pada waktu $t = T$. Perdagangan ini dibolehkan terjadi dalam setiap waktu : $t = 1, \dots, T$

Model probablitas terdiri dari tiga komponen :

- Ruang sampel $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$, yang mewakili seluruh kemungkinan kondisi pada waktu T.
- Struktur informasi $\mathcal{I} = (\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_T)$, yang menjelaskan informasi yang masuk sampai waktu tertentu. Partisi-partisi interval waktu dianggap sebagai $\mathcal{P}_t = \{A_1^t, \dots, A_{r_t}^t\}$ dengan $r_0 = 1 \leq r_1 \leq \cdots \leq r_{T-1} \leq r_T = n$.
- Ukuran peluang $\Omega \to [0,1]$, menjelaskan peluang terjadinya suatu kondisi $p_i = P(\omega_i)$ yang menyatakan peluang terjadinya kondisi ω_i pada waktu $t = T$.

Sebuah alternatif Eropa dengan batas akhir S memiliki pola pembayaran (positif atau negatif) pada waktu S dan memiliki informasi *contingent* pada waktunya. Oleh karena itu alternatif Eropa dapat dinyatakan sebagai variabel acak non-negatif . Dengan demikian X_S dapat disajikan dalam bentuk vektor $\left(X(A_1^S), \dots, X\left(A_{r_S}^S\right)\right) \in \mathbb{R}^{r_S}$, dimana r_S menyatakan nomor atom-atom $\mathcal{P}_S$. Kuantitas $X(A_1^S)$ diintrepetasikan sebagai jumlah uang yang harus dibayar atau diterima jika kejadian A_i^S terjadi pada waktu *S*.

Dalam model ekonomi ini akan diperdagangkan *(N+1)* klaim-klaim contingent tak nol dengan batas waktu *T*. Sekuritas-sekuritas ini dapat dibeli dan dijual dengan harga pada waktu transaksi terjadi, $t = 0, \dots, T$. Karena sekuritas memberikan holder payoff yang tak nol pada batas waktunya, maka diasumsikan bahwa $S_t(\omega) > 0$ untuk semua ω sedemikian hingga $S_T(\omega) > 0$, yaitu harganya bernilai positif sepanjang sekuritas memiliki harapan mendapatkan payoff positif non-zero pada batas akhir, khususnya $S_0 > 0$.

Beberapa Pilihan untuk Sekuritas ke-0

- Akun bank, harga awal diberikan oleh $S_0^0 \equiv 1$ dan $S_t^0(\omega) = S_{t-1}^0(\omega)\left(1 + r_t(\omega)\right)$ untuk semua $\omega \in \Omega$, dimana r_t memenuhi
  - $r_0(\omega) = 0$, untuk semua $\omega \in \Omega$
  - $r_t(\omega) > -1$, untuk semua $\omega \in \Omega$ dan $t \geq 1$
  - (r_t) adalah $\mathcal{J} - predictable$
- Bond Nol (Zero-Bond), bond nol dengan batas akhir pada waktu *T* adalah sekuritas yang dibayar satu rupiah pada waktu *T* dengan mengabaikan kondisi ekonomi pada waktu tersebut, $S_T^0 \equiv 1_\Omega$. Asumsi dari aktivitas ekonomi pada model ini antara lain :
  - Semua sekuritas dapat dibeli atau dijual dalam kuantitas berapapun
  - Pasar bebas arbitrase
  - Dibolehkan *short selling* untuk sekuritas apapun

B. Portofolio dan Strategi Perdagangan

Sebuah portofolio statis adalah kombinasi dari banyaknya (posisi) sekuritas yang berbeda. Ini dapat direpresentasikan dengan *(N+1)*-tuple

$\boldsymbol{\Phi} = (\phi^0, \phi^1, \dots, \phi^N)$ dimana ϕ^j menunjukkan posisi sekuritas ke-*j*.

Perdagangan di antara interval waktu memungkinkan *re-balancing* terhadap portofolio di waktu tersebut, yaitu likuidasi (pencairan) sekuritas di posisi tertentu dan membentuk portofolio yang lain. Ini adalah konsep portofolio dinamis, yakni portofolio yang komposisinya berubah-ubah hingga melewati batas waktu *S*. Portofolio dinamis dijelaskan sebagai berikut :

- Pada waktu *t = 0*, agen membeli portofolio $\boldsymbol{\Phi_1}$ pada harga yang disepakati pada waktu *t = 0*.

- Pada waktu *t = 1*, agen mencairkan portofolio $\boldsymbol{\Phi_1}$ dan menyusun portofolio baru $\boldsymbol{\Phi_2}$, kedua transaksi terjadi pada harga yang disepakati pada waktu *t = 1*.

- Secara umum, agen menahan portofolio $\mathbf{\Phi_t}$ selama periode *[t - 1, t]* dan mencairkannya pada waktu *t* dengan harga yang telah disepakati, secara simultan (terus-menerus) menyusun portofolio baru $\mathbf{\Phi_{t+1}}$. Ini terjadi pada waktu *S – 1* di akhir waktu. Kemudian portofolio $\mathbf{\Phi_S}$ ditahan sampai waktu *t = S*, yakni waktu untuk mencairkan portofolio dan menggunakannya.

Strategi Perdagangan

Re-balancing terhadap portofolio di pertengahan interval akan terjadi ketika ada informasi yang tersedia. Persyaratan $\mathcal{I}-predictable$ menjamin bahwa $\mathbf{\Phi_t}$, komposisi dari portofolio selama periode $[t-1, t]$ akan diketahui pada waktu $t-1$, segera setelah informasi $\mathcal{P}_{t-1}$ muncul.

Nilai akuisisi dan Likuidasi Strategi Perdagangan

Jika $\mathbf{\Phi} = (\Phi_t)_{1\le t\le S}$ adalah sebuah strategi perdagangan dengan batas waktu *S*, nilai akuisisinya pada waktu $t = 0, \dots, S-1$ didefinisikan oleh

$$V_t^{Acq}[\mathbf{\Phi}] = \phi_{t+1}^0 S_t^0 + \phi_{t+1}^1 S_t^1 + \cdots + \phi_{t+1}^N S_t^N$$

Nilai likuidasi dari $\mathbf{\Phi}$ pada waktu *t* didefinisikan sebagai

$$V_t^{Liq}[\mathbf{\Phi}] = \phi_t^0 S_t^0 + \phi_t^1 S_t^1 + \cdots + \phi_t^N S_t^N$$

Misalkan $V_0^{Acq}[\mathbf{\Phi}]$ adalah nilai awal dan $V_S^{Liq}[\mathbf{\Phi}]$ adalah nilai akhir dari $\mathbf{\Phi}$**.** Nilai likuidasi pada waktu *t* berhubungan dengan nilai ketika portofolio $\mathbf{\Phi_t}$ terlikuidasi pada waktu *t* sesaat sebelum memperoleh portofolio baru $\mathbf{\Phi_{t+1}}$ pada waktu $V_t^{Acq}[\mathbf{\Phi}]$.

Strategi *Self-Financing*

Ketika *re-balancing* portofolio dengan strategi perdagangan, selisih antara pendapatan ketika likuidasi sebuah portofolio dan dana yang dibutuhkan untuk menyusun portofolio pada periode selanjutnya dapat bernilai positif atau negatif. Strategi perdagangan *Self-Financing* adalah strategi $\mathbf{\Phi} = (\Phi_t)_{0\le t\le S}$ untuk memperoleh pendapatan ketika likuidasi $\mathbf{\Phi_t}$ pada waktu *t* sama dengan jumlah dana yang dibutuhkan untuk menyusun $\mathbf{\Phi_{t+1}}$, ini ditunjukkan pada persamaan berikut

$$V_t^{Liq}[\mathbf{\Phi}] = V_t^{Acq}[\mathbf{\Phi}]$$

Himpunan dari strategi *Self-Financing* adalah tertutup terhadap operasi dasar matematika, yakni :

- Jumlah dari 2 strategi portofolio *Self-Financing* dengan batas waktu *S* adalah strategi *Self-Financing* dengan batas waktu *S* juga
- Perkalian sebuah strategi *Self-Financing* dengan bilangan skalar menghasilkan strategi *Self-Financing* yang baru dengan batas waktu *S*

C. Attainibilitas dan Replikasi

Alternatif X_S dengan batas waktu *S* dikatakan ***attainable*** jika terdapat strategi perdagangan *Self-Financing* dengan batas waktu $\mathbf{\Phi} = (\Phi_t)_{0\le t\le S}$ pada waktu *S*, sedemikian hingga berlaku

$$V_S[\mathbf{\Phi}] = X_S$$

D. The Law of One Price

Misalkan X_S adalah sebuah alternatif attainable dengan batas akhir S yaitu $X_S \in \mathcal{M}_S$ yang mana dapat dicari portofolio replikasi dari $\mathbf{\Phi}$. Ini berarti bahwa $\mathbf{\Phi}$ adalah strategi *self-financing* sedemikian hingga $V_S[\mathbf{\Phi}] = X_S$.

Lemma 3.1 *The Law of One Price berlaku untuk batas waktu S jika dan hanya jika setiap strategi* $\boldsymbol{\Phi}$ *mereplikasi* $Y_S = 0$ *memenuhi* $V_0[\boldsymbol{\Phi}] = 0$.

Proposisi 3.2 *Salah satu dari dua pernyataan berikut berlaku pada alternatif :*

- *The Law of One Price berlaku untuk alternatif dengan batas waktu S*
- *Untuk suatu alternatif* $X_S \in \mathcal{M}_S$ *dan* $\lambda \in \mathbb{R}$ *dapat ditemukan strategi replikasi* $\boldsymbol{\Phi}$ *untuk* X_S *yang memenuhi*

$$V_0[\boldsymbol{\Phi}] = \lambda$$

Proposisi 3.3 *The Law of One Price berlaku untuk semua batas waktu jika dan hanya jika ini berlaku untuk alternatif-alternatif dengan batas waktu T.*

Teorema 3.4 *Misalkan Law of One Price berlaku. Maka* $\pi_{0,S}: \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ *adalah fungsional linier untuk semua* $S = 1, \dots, T$

E. Bebas Arbitrase dan Fungsional Harga Positif

Sebuah strategi perdagangan yang dapat diterima dengan batas waktu S adalah strategi *self-financing* $\mathbf{\Phi} = (\Phi_t)_{0 \le t \le S}$, dimana nilainya non-negatif pada semua interval waktu, yakni $V_t[\mathbf{\Phi}] \ge 0$.

Perhatikan karena sebuah arbitrase memiliki nilai awal nol, maka tidak diperlukan investasi pada semua permulaan portofolio. Pada sisi lain, karena strategi yang digunakan adalah Strategi *self-financing*, maka tidak diperlukan juga investasi pada tiap interval waktu. *Re-balancing* akan selalu membiayai portofolio denga cara mencairkan portofolio sebelumnya. Karena strategi ini akan dapat diterima, holder tidak memiliki passiva yang dapat dicairkan.

Proposisi 3.4 *Pasar akan bebas arbitrase untuk semua batas jika dan hanya jika pasar tidak memperbolehkan arbitrase untuk batas waktu T.*

Akibat 3.5 *Anggap arbitrase diabaikan. Maka jika* $\boldsymbol{\Phi}$ *adalah strategi self-financing dengan* $V_S[\boldsymbol{\Phi}] \ge 0$, *maka* $V_t[\boldsymbol{\Phi}] \ge 0$ *untuk semua* $0 \le t \le S$. *Jika* $V_S[\boldsymbol{\Phi}] = 0$ *berlaku maka* $V_t[\boldsymbol{\Phi}] = 0$ *untuk semua* $0 \le t \le S$.

Teorema 3.6 *Anggap arbitrase diabaikan, maka jika dua strategi self-financing* $\boldsymbol{\Phi}$ *dan* $\boldsymbol{\Psi}$ *memenuhi* $V_S[\boldsymbol{\Phi}] = V_S[\boldsymbol{\Psi}]$ *untuk suatu S, maka* $V_t[\boldsymbol{\Phi}] = V_t[\boldsymbol{\Psi}]$ *untuk* $0 \le t \le S$.

Teorema 3.7 *Pasar bebas arbitrase jika dan hanya jika fungsi harga positif (strongly positive).*

F. Pasar Lengkap dan Sekuritas *Arrow-Debreu*

Pasar dikatakan sebagai pasar *complete* untuk batas waktu *S* jika setiap alternatif dengan batas waktu *S* adalah alternatif yang *attainable*.

Lemma 3.8 *Pasar dikatakan sebagai pasar lengkap pada batas waktu S jika dan hanya jika semua sekuritas Arrow-Debreu dengan batas waktu S adalah alternatif attainable.*

Proposisi 3.9 *Pasar lengkap untuk semua batas waktu jika dan hanya jika ini lengkap untuk batas waktu T.*

4. Kesimpulan

1) Re-balancing terhadap portofolio di pertengahan interval akan terjadi ketika ada informasi yang tersedia. Diberikan portofolio yang dinamis secara stokastik dengan batas waktu *S* sebagai berikut
$$\boldsymbol{\Phi} = (\Phi_{\mathrm{t}})_{1\le \mathrm{t}\le \mathrm{S}} = (\phi^0, \phi^1, \dots, \phi^N)_{1\le \mathrm{t}\le \mathrm{S}}$$
dengan informasi $\mathcal{I} - predictable$ terhadap proses $\mathcal{P}_{t_{1\le \mathrm{t}\le \mathrm{S}}}$. Portofolio memiliki nilai akuisisi $V_t^{Acq}[\boldsymbol{\Phi}]$ dan nilai likuidasi $V_t^{Liq}[\boldsymbol{\Phi}]$. Nilai likuidasi pada waktu *t* berhubungan dengan nilai ketika portofolio $\boldsymbol{\Phi}_{\mathbf{t}}$ terlikuidasi pada waktu *t* sesaat sebelum memperoleh portofolio baru $\boldsymbol{\Phi}_{\mathbf{t+1}}$ pada waktu $V_t^{Acq}[\boldsymbol{\Phi}]$.

2) Ketika *re-balancing* terjadi akan terdapat selisih antara pendapatan ketika likuidasi portofolio dan dana yang dibutuhkan untuk menyusun portofolio pada periode selanjutnya dapat bernilai negatif atau positif. Strategi *Self-financing* dapat diaplikasikan untuk mendapatkan nilai likuidasi yang sama dengan dana untuk penyusunan portofolio baru, ini dijelaskan pada persamaan berikut $V_t^{Liq}[\boldsymbol{\Phi}] = V_t^{Acq}[\boldsymbol{\Phi}]$

3) Strategi replikasi adalah jika nilai alternatif yang *attainable* sama dengan nilai akhiir strategi perdagangan, $V_S[\boldsymbol{\Phi}] = X_S$. Alternatif yang *attainable* X_S, yakni yang dapat dicari portofolio replikasi dari $\boldsymbol{\Phi}$ yang berarti juga adalah strategi *Self-financing* akan memudahkan pendefinisian nilai fair X_S dengan biaya penyusunan strategi replikasi $\pi_{0,S}(X_S) = V_0[\boldsymbol{\Phi}]$

4) Pasar yang bebas arbitrase mendukung terpenuhinya kondisi pasar yang menguntungkan. Karena pada pasar yang bebas arbitrase, strategi yang diperdagangkan adalah strategi *Self-financing* yang nilainya non-negatif pada semua interval waktu, sehingga dapat dilakukan *re-balancing* portofolio yang akan selalu membiayai portofolio dengan cara mencarikan portofolio sebelumnya. Nilai akhir dari *re-balancing* portofolio ini bernilai tak nol dan akan terdapat keadaan likuidasi $\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{S}}$ yang menguntungkan. Berdasarkan penjelasan tersebut, dapat digambarkan bahwa dengan pasar bebas arbitrase, strategi *Self-financing* dan strategi replikasi dapat dihasilkan perdagangan yang memiliki potensi untung dengan biaya nol dan potensi tak merugi.

5. Daftar Pustaka

Dokuchaev, Nikolai. 2007. *Mathematical Finance : Core Theory, Problems and Statistical Algorithms.* Oxon : Routledge 2 Park Square.

Hans, Folmer & Schied, Alexander. 2004. *Stochastic Finance, An Introduction in Discrete Time*. Berlin : Walter de Gruyter GmbH & Co.

Jouini, Elyes. 1997.*Market Imperfections, Equilibrium and Arbitrage. Lecture Notes in Mathematics : Financial Mathematics :* pp.248-298. Berlin : Springer.

Medina, Pablo Koch & Merino, Sandro. 2003. *Mathematical Finance and Probability, A Discrete Introduction*.Berlin : Birkhauser Verlag.

Sharpe, William F., Alexander, Gordon J. & Bailey Jeffery V. 2005. *Investasi, Edisi Keenam.* Jakarta : Indeks.

Elementary Asset Pricing Theory. 2009. California Institute of Technology, Division of The Humanities and Social Sciences.