MODIFIKASI STATISTIK UJI-t PADA TEST INFERENSIA MEAN MEREDUKSI PENGARUH KEASIMETRIKAN POPULASI MENGGUNAKAN EKSPANSI CORNISH-FISHER

[1]Joko Riyono

[1]*Staf.Pengajar Fakultas Teknologi Industri Universitas Trisakti Jakarta*
(Kampus A Jl.Kiyai Tapa No.1,Jakarta11440)
E-mail : jokoriyono@yahoo.com

Abstract. *This article considers a procedure that reduces the effect of population skewness on the distribution of the variabel-t so that tests about the mean can be more correctly computed with a modification of the t variabel.A modification of the t variabel is obtained using the Cornish-Fisher expansion.*

Key Words *: Skewness,t variable,Cornish-Fisher expansion.*

Abstrak. *Paper ini membahas suatu prosedur yang mengurangi pengaruh kemiringan dari populasi pada distribusi student-t sehingga uji inferensi mean dapat terhitung lebih baik dengan suatu modifikasi variable student-t .Modifikasi dari variabel student-t diperoleh menggunakan ekspansi Cornish-Fisher.*

Kata Kunci *:Kemiringan ,Variabel student-t,Ekspansi Cornish-Fisher.*

1. Pendahuluan

Dalam Statistik inferensia mean satu populasi sering dipakai statistik :

$$T = \frac{\overline{Y} - \mu}{\left(S^2 / n\right)^{1/2}}$$

untuk menguji hipotesa :
Ho : $\mu = \mu_0$ versus satu dari tiga kemungkinan alternatif yaitu :
(1) H1 = $\mu \neq \mu_0$
(2) H1 = $\mu > \mu_0$
(3) H1 = $\mu < \mu_0$

Dengan asumsi : (i) Yi berdistribusi indepeden
(ii) Populasi berdistribusi normal

hasil dalam teori statistik yang cukup baik dibuat oleh student (1908) bahwa T ~ t(n-1) adalah distribusi student t dengan derajat kebebasan (n-1). Dengan asumsi di atas, dipunyai uji pada level α :
untuk Ho : $\mu = \mu_0$ vs H1 : $\mu \neq \mu_0$ tolak Ho jika $|TC| > t_{\alpha/2}$
untuk Ho : $\mu = \mu_0$ vs H1 : $\mu > \mu_0$ tolak Ho jika $TC > t_{\alpha}$
untuk Ho : $\mu = \mu_0$ vs H1 : $\mu < \mu_0$ tolak Ho jika $TC < -t_{\alpha}$

dengan $TC = \dfrac{\overline{Y} - \mu_o}{\left(S^2/n\right)^{1/2}}$

Tetapi jika asusmsi kedua tak terpenuhi yaitu populasi tidak berdistribusi normal, Cicchitelli (1989) dengan studi Monte Carlo mendapatkan bahwa kemiringan populasi mempengaruhi statistik T di atas sehingga kita tidak dapat mendekatinya dengan distribusi student t(n-1) apalagi jika ukuran sampel kecil.Johnson (1978) telah membuat modifikasi dari statistik T di atas untuk mengurangi pengaruh kemiringan populasi terhadap statistik T tersebut.Dalam tulisan ini akan dibahas modifikasi statistik T tersebut menggunakan ekspansi Cornish-Fisher.

2. Ekspansi Cornish-Fisher

Andaikan diberikan $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ adalah sampel random dari suatu distribusi G dengan mean μ, variansi σ^2 dan $\mu_3, \mu_4, \ldots$ masing-masing adalah momen central ketiga, keempat, ... dari G. Untuk sebarang variabel random Y dengan distribusi G, bentuk ekspansi Cornish-Fisher diberikan dengan :

$$CF(Y) = \mu + \sigma\xi + \frac{\mu_3}{6\sigma^2}(\xi^2 - 1) + \ldots \qquad \text{……. (1.1)}$$

dimana ξ adalah variabel normal standar.

Karena $\quad \mathrm{Var}(\overline{Y}) = \dfrac{\sigma^2}{n}$ dan

$$\mu_3(\overline{Y}) = E(\overline{Y} - \mu)^3 = \frac{1}{n^3} E\left\{\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \mu)\right\}^3$$

$$= \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} E(Y_i - \mu)^3 = \frac{\mu_3}{n^2}$$

Sehingga :

$$CF(\overline{Y}) = \mu + \frac{\sigma}{n^{\frac{1}{2}}}\xi + \frac{\mu_3}{6n\sigma^2}(\xi^2 - 1) + O\left(n^{-\frac{3}{2}}\right) \qquad \text{……. (1.2)}$$

Dari ekspansi di atas dapat dicatat bahwa kemiringan populasi μ_3 adalah koefisien dari suku (ξ^2-1) serta tampak dalam suku-suku lain tetapi dengan order yang lebih kecil. Kunci dalam mendapatkan modifikasi variabel T dalam pendekatan Johnson adalah mengeliminasi suku yang melibatkan μ_3 dalam variabel T pembangun yang diberikan pada bagian bawah berikut :

Diberikan variabel T pembangun

$$TJ = \frac{(\overline{Y} - \mu) + \lambda + \gamma\left\{(\overline{Y} - \mu)^2 - \dfrac{\sigma^2}{n}\right\}}{\left\{\dfrac{S^2}{n}\right\}^{\frac{1}{2}}} \qquad \text{……. (1.3)}$$

λ dalam TJ dipilih sehingga suku konstan dalam ekspansi Cornish-Fisher dari TJ berjumlah nol sehingga bias order yang lebih rendah tereleminasi γ dipilih sehingga koefesien dari suku ξ^2 dalam ekspansi Cornish-Fisher dari TJ adalah nol (dengan demikian mengeliminasi pangaruh kemiringan order yang lebih rendah). Dapat ditunjukkan bahwa $\gamma = \frac{\mu_3}{3\sigma^4} dan \lambda = \frac{\mu_3}{2n\sigma^2}$ sebagai berikut :

Karena : $E(s^2) = \sigma^2 dan \operatorname{var}(S^2) = \frac{\mu_4}{n} + \frac{3-n}{n(n-1)}\sigma^4$

$$\operatorname{var}(S^2) = \frac{\mu_4}{n} + \frac{\sigma^4}{n}\left(-1 + \frac{2}{n} + \frac{2}{n^2} + \ldots\right) \approx \frac{\mu_4}{n} - \frac{\sigma^4}{n}$$

sehingga ekspansi Cornish-Fisher dari $\bar{Y}$ dan S^2, suku-suku lebih tinggi diabaikan adalah :

$$CF(\bar{Y}) = \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\xi + \frac{\mu_3}{6n\sigma^2}(\xi^2 - 1)$$

$$CF(S^2) = \sigma^2 + \left[\frac{\mu_4 - \sigma^4}{n}\right]^{\frac{1}{2}}\eta$$

$$= \sigma^2\left\{1 + \left[\frac{\mu_4 - \sigma^4}{n\sigma^4}\right]^{\frac{1}{2}}\eta\right\}$$

dimana ξ dan η adalah variabel random normal standar. Gantikan nilai $\bar{Y}$ dan S^2 dalam (1.3) dengan ekspansinya, maka dengan pengabaian suku $O(n^{-1})$, ekspansi Cornish-Fisher dari TJ adalah :

$$CF(TJ) = \xi + \left(\frac{\gamma\sigma}{\sqrt{n}} - \frac{\mu_3}{3\sqrt{n}\sigma^3}\right)\xi^2$$

$$+ \frac{\lambda\sqrt{n}}{\sigma} - \frac{\gamma\sigma}{\sqrt{n}} - \frac{\mu_3}{6\sqrt{n}\sigma^3} - \frac{\mu_4 - \sigma^4}{2\sqrt{n}\sigma^2}\xi\xi^*$$

dengan ξ dan ξ^* variabel random normal standar yang independen.

Bukti :

$$TJ = \left\{(\bar{Y} - \mu) + \lambda + \gamma\left[(\bar{Y} - \mu)^2 - \left(\frac{\sigma^2}{n}\right)\right]\right\}\left(\frac{S^2}{n}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\bar{Y} - \mu = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\xi + \frac{\mu_3}{6n\sigma^2}\xi^2 - \frac{\mu_3}{6n\sigma^2}$$

$$(\bar{Y} - \mu)^2 = \frac{\sigma^2}{n}\xi^2 + \frac{\mu_3^2}{36n^2\sigma^4}\xi^4 + \frac{\mu_3}{36n^2\sigma^4}$$

$$+ \frac{\mu_3}{3n\sqrt{n}\sigma}\xi^3 - \frac{\mu_3^2}{18n^2\sigma^4}\xi^2 - \frac{\mu_3}{6n\sqrt{n}\sigma}\xi .$$

$$\frac{S^2}{n}=\frac{\sigma^2}{n}\left\{1+\left(\frac{\mu_4-\sigma^4}{n\sigma^4}\right)^{\frac{1}{2}}\eta\right\}$$

$$\left(\frac{S^2}{n}\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left\{1+\left(\frac{\mu_4-\sigma^4}{n\sigma^4}\right)^{\frac{1}{2}}\eta\right\}^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left\{1-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu_4-\sigma^4}{n\sigma^4}\right)^{\frac{1}{2}}\eta+\frac{3}{4.2!}\frac{\mu_4-\sigma^4}{n\sigma^4}\eta^2+\ldots\right\}$$

sehingga:

$$CF(TJ)=\left\{\frac{\gamma\mu_3^2}{36n^2\sigma^4}\xi^4+\frac{\gamma\mu_3}{3n\sqrt{n}\sigma}\xi^3+\left(\frac{\mu_3}{6n\sigma^2}+\frac{\gamma\sigma^2}{n}-\frac{\gamma\mu_3^2}{18n^2\sigma^4}\right)\xi^2\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}-\frac{\gamma\mu_3}{6n\sqrt{n}\sigma}\right)\xi+\frac{\gamma\mu_3^2}{36n^2\sigma^4}+\lambda-\frac{\mu_3}{6n\sigma^2}-\frac{\gamma\sigma^2}{n}\right\}\frac{\sqrt{n}}{\sigma}$$

$$\left\{1-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu_4-\sigma^4}{n\sigma^4}\right)^{\frac{1}{2}}\eta+\frac{3}{4.2!}\frac{\mu_4-\sigma^4}{\sigma^4}\eta^2-\ldots\right\}$$

$$CF(TJ)=\left\{\frac{\gamma\mu_3^2}{36n\sqrt{n}\sigma^5}\xi^4+\frac{\gamma\mu_3}{3n\sigma^2}\xi^3+\left(\frac{\mu_3}{6\sqrt{n}\sigma^3}+\frac{\gamma\sigma}{\sqrt{n}}-\frac{\gamma\mu_3^2}{18n\sqrt{n}\sigma^5}\right)\xi^2+\right.$$

$$\left.\left(1-\frac{\gamma\mu_3}{6n\sigma^2}\right)\xi+\frac{\gamma\mu_3^2}{36n\sqrt{n}\sigma^5}+\frac{\lambda\sqrt{n}}{\sigma}-\frac{\mu_3}{6\sqrt{n}\sigma^3}-\frac{\gamma\sigma}{\sqrt{n}}\right\}$$

$$\left\{1-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu_4-\sigma^4}{n\sigma^4}\right)^{\frac{1}{2}}\eta+\frac{3}{4.2!}-\frac{\mu_4-\sigma^4}{n\sigma^4}\eta^2\ldots\right\}$$

$$CF(TJ)=\left(\frac{\mu_3}{6\sqrt{n}\sigma^3}+\frac{\gamma\sigma}{\sqrt{n}}\right)\xi^2+\xi+\frac{\lambda\sqrt{n}}{\sigma}-\frac{\mu_3}{6\sqrt{n}\sigma^3}-\frac{\gamma\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu_4-\sigma^4}{n\sigma^4}\right)^{\frac{1}{2}}\xi\eta$$

Tulis $\eta=\rho\xi+\xi^*$ dimana ρ adalah kolerasi antara $\overline{X}$ dan S^2 dan ξ^* adalah variabel random normal independen terhadap ξ. $\rho=\mu_3\left\{\sigma^2\left(\mu_4-\sigma^4\right)\right\}^{-\frac{1}{2}}$ sehingga :

$$CF(TJ) = \xi + \left(\frac{\mu_3}{6\sqrt{n}\sigma^3} + \frac{\gamma\sigma}{\sqrt{n}}\right)\xi^2 + \frac{\lambda\sqrt{n}}{\sigma} - \frac{\mu_3}{6\sqrt{n}\sigma^3} - \frac{\gamma\sigma}{\sqrt{n}}$$
$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu_4 - \sigma^4}{n\sigma^4}\right)^{\frac{1}{2}}\xi\left\{\frac{\mu_3}{\left[\sigma^2\left(\mu_4 - \sigma^4\right)\right]^{\frac{1}{2}}}\xi + \xi^*\right\}$$
$$CF(TJ) = \xi + \left(\frac{\mu_3}{6\sqrt{n}\sigma^3} + \frac{\gamma\sigma}{\sqrt{n}} - \frac{\mu_3}{2\sqrt{n}\sigma^3}\right)\xi^2 + \frac{\lambda\sqrt{n}}{\sigma} - \frac{\mu_3}{6\sqrt{n}\sigma^3} - \frac{\lambda\sigma}{\sqrt{n}}$$
$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu_4 - \sigma^4}{n\sigma^4}\right)^{\frac{1}{2}}\xi\xi^*$$

Dengan menyeleksi γ dan λ sehingga koefesien dari ξ^2 adalah nol juga suku konstan berjumlah nol, ekspresi hasil akan mengurangi bias, didapat :

$$\frac{\mu_3}{6\sqrt{n}\sigma^3} + \frac{\gamma\sigma}{\sqrt{n}} - \frac{\mu_3}{2\sqrt{n}\sigma^3} = 0$$
$$-\frac{\mu_3}{3\sqrt{n}\sigma^3} + \frac{\gamma\sigma}{\sqrt{n}} = 0$$
$$\gamma = \frac{\mu_3}{3\sigma^4}$$

dan $\frac{\gamma\sqrt{n}}{\sigma} - \frac{\mu_3}{6\sqrt{n}\sigma^3} - \frac{\gamma\sigma}{\sqrt{n}} = 0$

$$\frac{\lambda\sqrt{n}}{\sigma} - \frac{\mu_3}{6\sqrt{n}\sigma^3} - \frac{\mu_3}{3\sqrt{n}\sigma^3} = 0$$
$$\frac{\lambda\sqrt{n}}{\sigma} - \frac{\mu_3}{2\sqrt{n}\sigma^3} = 0$$
$$\lambda = \frac{\mu_3}{2n\sigma^2}$$

Jadi $CF(TJ) = \xi - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_4 - \sigma^4}{n\sigma^4}\right)^{\frac{1}{2}}\xi\xi^* + \mathbf{0}\left(n^{-1}\right)$

$$= \xi - \frac{1}{2\sqrt{n}}\left(K_u - 1\right)^{\frac{1}{2}}\xi\xi^* + \mathbf{0}\left(n^{-1}\right) \qquad \text{....... (1.4)}$$

dan $TJ = \left\{\left(\bar{Y} - \mu\right) + \frac{\mu_3}{6\sigma^2 n} + \frac{\mu_3}{3\sigma^4}\left(\bar{Y} - \mu\right)^2\right\}\left(\frac{S^2}{n}\right)^{-\frac{1}{2}}$ .... (1.5)

Terlihat bahwa TJ yang diberikan oleh (1.5) tidak dapat dihitung dengan H : $\mu = \mu_0$, karena μ_3 dan σ^2 biasanya tidak diketahui. Johnson menyarankan mengganti μ_3 dan σ^2 dengan estimasi sampel $\hat{\mu}_3 = \sum_{i=1}^{n}\frac{\left(Y_i - \bar{Y}\right)^3}{n}$ dan variansi sampel S^2. Ekspansi Cornish-Fisher masih (1.4) Untuk contoh penggunaannya uji hipotesis $H_0 : \mu = \mu_0$ melawan satu dari tiga alternatif kemungkinan, maka dipunyai uji level α sebagai berikut :

TT : untuk $H_0 : \mu = \mu_0$ vs $H_1 : \mu \neq \mu_0$,
tolak H_0 jika $|TJH| > t_\alpha/2$ ……. (1.6)
TU : untuk $H_0 : \mu = \mu_0$ vs $H_1 : \mu > \mu_0$,
tolak H_0 jika $TJH > t_\alpha$ ……. (1.7)
Tl : untuk $H_0 : \mu = \mu_0$ vs $H_1 : \mu < \mu_0$,
tolak H_0 jika $TJH < -t_\alpha$ ……. (1.8)

dimana $$TJH = \frac{\left(\bar{Y} - \mu_0\right) + \hat{\mu}_3/(6s^2 n) + \left(\hat{\mu}_3/(3s^4)\right)\left(\bar{Y} - \mu\right)^2}{\left(\frac{s^n}{n}\right)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{……. (1.9)}$$

dan t_α notasi bagian atas 100α titik persentil dari distribusi t dengan derajat bebas (n-1).

3. Kesimpulan

Dari uraian di atas terlihat bahwa statistik**:**

$$TJ = \left\{\left(\bar{Y} - \mu\right) + \frac{\mu_3}{6\sigma^2 n} + \frac{\mu_3}{3\sigma^4}\left(\bar{Y} - \mu\right)^2\right\}\left(\frac{S^2}{n}\right)^{-\frac{1}{2}}$$ yang diperoleh melalui statistik T pembangun: $$TJ = \frac{\left(\bar{Y} - \mu\right) + \lambda + \gamma\left\{\left(\bar{Y} - \mu\right)^2 - \frac{\sigma^2}{n}\right\}}{\left\{\frac{S^2}{n}\right\}^{\frac{1}{2}}}$$ Dengan menyeleksi γ dan λ sehingga koefesien dari ξ^2 & suku konstan pada ekspansi Cornish-Fisher nya berjumlah nol, ekspresi hasil akan mengurangi bias.

4. Daftar Pustaka

Benjamini,Y(1983),"Is T-Test Really Conservative whe the Parent Distribution is Long-Tailed",J.Am.Statist.Assoc.,78,645-654.
Dudewicz,E.j&Mishra,S.N.(1988),Modern Mathematical Statistics,John Wiley& Sons.
Hall,P.(1992),The Bootstrap and Edgeworth Expansion,Spinger-Verlag Inc. New York.
Lehmann,E.L.(1983),Theory of Point Estimation,John Wiley & Sons.
Johnson,Norman J.(1978),"Modified t Test and Confidence Intervals for Asymmetrical Populations",J.Am.Statist.Assoc.,73,536-544.
Wallace,DavidL.(1958),"Asymptotic Approximations to Distributions," Annals of Mathematical Statistics,29,165-170.