MENENTUKAN PROPORSI SAHAM PORTOFOLIO DENGAN METODE LAGRANGE

[1]Eti Kurniati, [2]Gani Gunawan, [3]Tegar Aji Sukma Bestari

[1,2,3]*Prodi Matematika FMIPA UNISBA, Jl. Ranggamalela No. 1 Bandung 40116*

e-mail: [1]eti_kurniati0101@yahoo.com, [2]ggani9905@gmail.com,

Abstrak. *Investasi adalah penanaman modal atau uang dengan tujuan untuk mendapatkan keuntungan di waktu yang akan datang. Kumpulan berbagai jenis investasi disebut portofolio. Portofolio ini bisa merupakan kumpulan dari berbagai saham yang dimiliki investor.Saham dikenal sebagai jenis investasi yang memiliki risiko dalam mendapatkan keuntungan (return). Oleh karena itu memiliki berbagai jenis saham dalam suatu portofolio memiliki risiko yang besar. Risiko saham diukur berdasarkan nilai varian dari return. Tujuan dari penulisan ini adalah menentukan proporsi saham-saham yang tergabung dalam portofolio sehingga didapat risiko minimum dengan return terbesar menggunakan metode Lagrange.*

Kata kunci: Portofolio saham, Metoda Lagrange

1. Pendahuluan

Secara umum pengertian investasi merupakan penanaman uang atau modal dalam suatu perusahaan atau proyek tertentu untuk tujuan memperoleh keuntungan. Sedangkan investasi saham adalah penanaman modal yang berhungan dengan pembelian dan penyimpanan saham pada sebuah pasar modal oleh seorang investor baik perorangan maupun perusahaan, dengan harapan akan mendapatkan deviden dan kenaikan nilai saham yang berimbas pada profit atau keuntungan yang akan didapat dalam penjualan saham tersebut.

Suatu investasi dilakukan dengan tujuan mendapatkan keuntungan yang maksimal, dengan risiko seminimal mungkin. Dalam investasi saham, risiko yang dihadapi oleh investor cukup fluktuatif. Ada hal-hal yang harus diperhatikan oleh investor dalam penanaman modalnya untuk pembelian saham, karena tidak semua saham memiliki risiko yang sama. Oleh karena itu, untuk mendapatkan suatu keuntungan dalam berinvestasi pada saham, seorang investor selalu dihadapkan pada dua pilihan yaitu, apakah investor akan memilih *expected return* yang tertinggi dengan varian tertentu atau memilih varian yang minimum dengan *expected return* tertentu. Secara umum bilamana suatu investasi dalam pembelian saham dilakukan dengan pilihan varian yang minimum dengan expected return tertentu, tentunya risiko yang ditimbulkannya untuk berinvestasi pada saham adalah kecil, dengan perolehan *expected return* yang maksimum. Sehingga jika seorang investor akan menanamkan modalnya dalam suatu portofolio saham, maka haruslah menyusun portofolio saham dengan memperhitungkan bobot masing-masing saham yang dipilihnya untuk mendapatkan proporsi yang tepat. Oleh karena itu, dalam makalah ini akan diperlihatkan suatu cara matematis untuk menentukan bobot masing-masing saham bilamana seorang investor akan berinvestasi dalam bentuk portofolio saham agar resiko kerugian yang ditimbulkannya minimum dengan return yang maksimum.

2. Permasalahan

Pengertian portofolio dalam investasi adalah gabungan dari berbagai instrument investasi seperti saham, deposito, porperti, obligasi, logam mulia dan lain-lain.

Menentukan portofolio dalam berinvestasi harus diputuskan melalui suatu perencanaan yang matang untuk kepentingan masa yang akan datang. Bukti empiris menunjukkan bahwa semakin banyak jenis saham yang dikumpulkan dalam keranjang portofolio, maka risiko kerugian saham yang satu dapat dinetralisir dengan keuntungan saham yang lain. Dalam pembentukan portofolio haruslah diidentifikasi efek-efek mana saja yang akan dipilih dan berapa presentase dana yang akan diinvestasikan pada masing-masing efek tersebut.

Evaluasi atas portofolio yang dipilih sangatlah penting karena dengan evaluasi yang baik bisa mengetahui pengembalian yang diharapkan (*return*) maupun resiko yang ditanggung. Dalam hal ini risiko merupakan kemungkinan terjadinya peristiwa yang tidak menguntungkan. Risiko adalah kerugian yang dihadapi oleh para investor. Risiko juga didefinisikan sebagai kemungkinan penyimpangan atau variabilitas *actual return* suatu investasi dengan *expected return* (Elton dan Gruber, 1995). Sedangkan dalam konteks manajemen investasi, *return* merupakan imbalan yang diperoleh dari investasi, dan *Expected return* adalah rata-rata tertimbang dari berbagai *return historis*, faktor penimbangnya adalah probabilitas masing-masing *return*. Sedangkan untuk *expected return* pada portofolio adalah rata-rata tertimbang dari *expected return* saham individual, faktor penimbangnya adalah proporsi dana yang diinvestasikan pada masing-masing saham (Halim, 2002:31), secara matematis ditulis

$$\overline{R}_p = \sum_{i=1}^{s} w_i \overline{R}_i$$

Dengan :

$\overline{R}_p$ = *expected return* portofolio

w_i = proporsi saham *i* dalam portofolio

$\overline{R}_i$ = *expected return* saham *i*

Risiko portofolio saham sangat berbeda dari rerata risiko masing-masing saham dalam portofolio tersebut. Varian portofolio dua saham dapat lebih kecil daripada varian masing-masing saham dalam portofolio (Zalmi Zubir, 2011). Risiko diartikan sebagai kemungkinan penyimpangan *actual return* terhadap *expected return*. Pengukuran risiko diukur berdasarkan penyebaran di sekitar rata-rata yang lebih dikenal dengan standar deviasi. Standar deviasi ini yang akan digunakan untuk mengukur risiko dari *realized return*, sedangkan risiko dari *expected return* diukur dengan *variance*.

Varian digunakan dalam menghitung risiko suatu investasi. Risiko investasi diukur berdasarkan perbedaan antara *expected return* dan *realized return*. Varian mengukur kuadrat perbedaan antara *realized* dan *realized return.* Semakin tinggi perbedaan tersebut maka semakin besar risiko yang dihadapi investor dalam setiap return yang akan diterima.

Misalkan R_{it} adalah *return* saham *i* di hari ke *t* dan $\overline{R}_i$ adalah *expected return* saham ke *i*,dengan bantuan formula (2.2) didapat formula varian dari *return* adalah.

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(R_{it} - \overline{R}_i)^2 \tag{2.1}$$

Atau bisa dituliskan sebagai

$$\sigma_p^2 = E(R_{it} - \overline{R}_i)^2 \tag{2.2}$$

Apabila portfolio terdiri dari dua jenis saham. Misalkan R_{1t} adalah *return* saham 1 hari ke *t* dan R_{2t} adalah *return* saham 2 pada hari ke *t*. Jika R_p adalah *return* portfolio dimana $R_p = w_1 R_{1t} + w_2 R_{2t}$, maka

$$E(R_p) = E(w_1 R_1 + w_2 R_2) = w_1 E(R_1) + \mathrm{w}_2\, E(R_2) = w_1 \overline{R_1} + w_2 \overline{R_2} \qquad (2.3)$$

Sehingga varian dari *return* suatu portofolio dengan 2 saham adalah

$$\sigma_p^2 = E(R_{it} - \overline{R_i})^2 = (w_1 R_{1t} + w_2 R_{2t}) - (w_1 \overline{R_1} + w_2 \overline{R_2})]^2 = E[w_1(R_{1t} - \overline{R_1}) + w_2\left(R_{2t} - \overline{R_2}\right)]^2$$

Besaran untuk $E(R_{1t} - \overline{R_1})(R_{2t} - \overline{R_2})$ dikenal dengan sebutan kovarian dan dinyatakan sebagai σ_{12} . Dengan demikian varian dari 2 saham adalah

$$\sigma_p{}^2 = w_1^2 \sigma_1^2 + 2 w_1 w_2 \sigma_{12}^2 + w_2^2 \sigma_2^2$$

Persamaan (2.2) diperlukan untuk mengetahui varian portofolio dengan banyak jenis saham.

Selanjutnya varian satu saham disebut dengan varian saham dan varian dua atau lebih saham disebut dengan varian portofolio. Dengan menggunakan simbol σ_i pangkat 2 sebagai varian saham ke *i* dan σ_{ij} sebagai kovarian saham *i* dan saham *j*, maka varian portofolio yang terdiri dari 2 saham secara umum dinyatakan sebagai berikut :

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{m} w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} w_i w_j \sigma_{ij} \qquad (2.4)$$

Dari persamaan (2.4) ini, akan ditentukan proporsi portofolio saham agar resiko yang diperoleh sekecil mungkin.

3. Pembahasan

Secara matematika kondisi minimum varian portofolio dapat dicapai dengan kondisi

$$(\sigma_p^2) = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{s} w_i w_j \sigma_{ij} \qquad (3.1)$$

Dengan :

σ_p^2 = varian portofolio

w_i = proporsi saham *i*

w_j = proporsi saham *j*

σ_{ij} = kovarian saham *i* dan *j*

Di mana kondisi atau kendala yang harus dipenuhi adalah

1. $\sum_{i=1}^{s} w_i \overline{R}_i - \overline{R}_p = 0$
2. $\sum_{i=1}^{s} w_i - 1 = 0$

Dengan :

w_i = proporsi saham *i*

$\overline{R}_i$ = *expected return* saham ke *i*

$\overline{R}_p$ = *return portofolio*

Kondisi ini menyatakan bahwa jumlah perkalian proporsi dan *expected return* masing-masing saham dalam portofolio haruslah sama dengan *return* portofolio, dan total seluruh proporsi dalam suatu portofolio haruslah sama dengan satu.

Objective function persamaan Lagrange didapat dari pengkombinasian ketiga persamaan di atas, dan dinyatakan dalam persamaan berikut

$$\text{Minimum } Var = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} w_i w_j \sigma_{ij} + \lambda_1\left(\sum_{i=1}^{s} w_i \bar{R}_i - \bar{R}_p\right) + \lambda_2\left(\sum_{i=1}^{s} w_i - 1\right) \tag{3.2}$$

Besaran λ_1 dan λ_2 adalah pengali Lagrange atau Lagrange *multiplier*. Lamda 1 (λ_1) adalah harga risiko per unit *expected return*. Lamda 2 (λ_2) adalah harga risiko per unit untuk setiap unit *expected return* yang terkait dengan perubahan proporsi saham-saham dalam portofolio. Dengan menggunakan Teorema *De'Fermat* dalam penjabaran matematisnya, maka diperoleh

$$w_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{\bar{R}_p(\bar{R}_1 - \bar{R}_2) - \bar{R}_2(\bar{R}_1 - \bar{R}_2)}{(\bar{R}_1 - \bar{R}_2)(\bar{R}_1 - \bar{R}_2)} = \left(-\frac{\bar{R}_2}{(\bar{R}_1 - \bar{R}_2)}\right) + \bar{R}_p\left(\frac{1}{(\bar{R}_1 - \bar{R}_2)}\right)$$

$$w_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{\bar{R}_1(\bar{R}_1 - \bar{R}_2) - \bar{R}_p(\bar{R}_1 - \bar{R}_2)}{(\bar{R}_1 - \bar{R}_2)(\bar{R}_1 - \bar{R}_2)} = \left(\frac{\bar{R}_1}{(\bar{R}_1 - \bar{R}_2)}\right) - \bar{R}_p\left(\frac{1}{(\bar{R}_1 - \bar{R}_2)}\right)$$

$$\lambda_1 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{2\sigma_{11}\bar{R}_2 + \bar{R}_p\left((2\sigma_{22} - 2\sigma_{11}) + 4\right) - 2\sigma_{12}(\bar{R}_1 - \bar{R}_2) + 2\sigma_{22}\bar{R}}{(\bar{R}_1 - \bar{R}_2)(\bar{R}_1 - \bar{R}_2)}$$

$$= \frac{2\sigma_{11}\bar{R}_2 + -2\sigma_{12}(\bar{R}_1 - \bar{R}_2) + 2\sigma_{22}\bar{R}}{(\bar{R}_1 - \bar{R}_2)(\bar{R}_1 - \bar{R}_2)} + \bar{R}_p\left(\frac{\left((2\sigma_{22} - 2\sigma_{11}) + 4\right)}{(\bar{R}_1 - \bar{R}_2)(\bar{R}_1 - \bar{R}_2)}\right) \tag{3.3}$$

$$\lambda_2 = \frac{\det(A_4)}{\det(A)} = \frac{\bar{R}_p\left(\bar{R}_2(2\sigma_{11} - 2\sigma_{12}) - \bar{R}_1(2\sigma_{21} + 2\sigma_{22})\right) - 2\left(\sigma_{11}\bar{R}_2^2 + 2\sigma_{12}\bar{R}_2\bar{R}_1 - \sigma_{22}\bar{R}_1^2\right)}{(\bar{R}_1 - \bar{R}_2)(\bar{R}_1 - \bar{R}_2)}$$

$$= \frac{-2\left(\sigma_{11}\bar{R}_2^2 + 2\sigma_{12}\bar{R}_2\bar{R}_1 - \sigma_{22}\bar{R}_1^2\right)}{(\bar{R}_1 - \bar{R}_2)(\bar{R}_1 - \bar{R}_2)} + \bar{R}_p\left(\frac{\left(\bar{R}_2(2\sigma_{11} - 2\sigma_{12}) - \bar{R}_1(2\sigma_{21} + 2\sigma_{22})\right)}{(\bar{R}_1 - \bar{R}_2)(\bar{R}_1 - \bar{R}_2)}\right)$$

4. Hasil

Implementasi hasil pembahasan di atas diperlihatkan pada contoh kasus berikut, di mana perhitungan dilakukan dalam penentuan bobot 2 jenis saham untuk satu portofolio yang menghasilkan varians minimum. Kedua jenis saham yaitu ASGR dan INCO dipilih secara acak. Data saham tersebut dapat dilihat pada table berikut.

Tabel 3.1
Nilai Saham dalam Satu Periode ASGR dan INCO

ASGR	INCO	ASGR	INCO	ASGR	INCO
295	13,150	305	14,300	320	14,550
300	13,000	295	13,700	315	14,400
300	13,250	295	13,700	305	14,650
300	13,700	305	14,050	310	14,600
305	13,850	295	14,300	305	14,200
305	14,000	285	14,000	305	14,400
315	14,050	290	14,150	295	14,350
315	14,250	290	14,450	305	14,100
305	14,450	295	14,600	300	14,050
305	14,500	310	14,500	295	14,450

Tabel 3.2
Return Satu Periode

ASGR	INCO	ASGR	INCO	ASGR	INCO
0.01695	-0.01141	-0.03279	-0.04196	-0.01563	-0.01031
0.00000	0.01923	0.00000	0.00000	-0.03175	0.01736
0.00000	0.03396	0.03390	0.02555	0.01639	-0.00341
0.01667	0.01095	-0.03279	0.01779	-0.01613	-0.02740
0.00000	0.01083	-0.03390	-0.02098	0.00000	0.01409
0.03279	0.00357	0.01754	0.01071	-0.03279	-0.00347
0.00000	0.01424	0.00000	0.02120	0.03390	-0.01742
-0.03175	0.01404	0.01724	0.01038	-0.01639	-0.00355
0.00000	0.00346	0.05085	-0.00685	-0.01667	0.02847
0.00000	-0.01379	0.03226	0.00345	0.01695	-0.01038

Tabel 3.3
Varian dan Exp. Return

Tabel A	varian dan *exp. Return*	
	ASGR	INCO
σ^2	0.000521	0.000293
ER	0.000802	0.003527

Tabel 3.4
Varian dan kovarian

Tabel B	varian dan kovarian saham	
	ASGR	INCO
ASGR	0.000521	0.000032
INCO	0.000032	0.000293

Tabel 3.5
Varian untuk matriks

Tabel C	varian untuk matriks persamaan Lagrange	
	ASGR	INCO
ASGR	0.001042	0.000064
INCO	0.000064	0.000585

Untuk mendapatkan nilai covarian menggunakan persamaan (2.4) yaitu

$$\operatorname{cov}(1,2) = \sum_{i=1}^{n} \left[R_{1i} - \bar{R}_1 \right] \left[R_{2i} - \bar{R}_2 \right]$$

$$\operatorname{cov}(1,2) = \sum_{i=1}^{31} \left[R_{1i} - 0,000802 \right] - \left[R_{2i} - 0,003527 \right] = 0,000032$$

Matriks untuk persamaan Lagrange ASGR dan INCO

$$\begin{bmatrix} 0,001042 & 0,000064 & 0,000802 & 1 \\ 0,000064 & 0,000585 & 0,003527 & 1 \\ 0,000802 & 0,003527 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

inverse matriks

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -367,038 & 1,29443 \\ 0 & 0 & 367,038 & -0,29443 \\ -367,038 & 367,037 & -201,837 & 0,52058 \\ 1,29443 & -0,29442 & 0,52058 & -0,00174 \end{bmatrix}$$

Dalam pembuatan persamaan matriksnya perhatikan kolom 3 dan 5 atau baris ke 3 dan 5. Akan didapat persamaan

$$w_1 = -367,038\overline{R_p} + 1,29443$$

$$w_2 = 367,037\overline{R_p} + 0,29442$$

$$\lambda_1 = -201,8372 + 0,5205$$

$$\lambda_2 = 0,5205 - 0.0017$$

Persamaan yang didapat masing mengandung variabel yang harus ditentukan oleh investor. Agar dapat memodelkan persamaan diambil variasi persamaan return portofolio seperti pada tabel 3.6 dan tabel 3.7

Tabel 3.6
Variasi porsi untuk berbagai exp. Return

Tabel F	Porsi Saham untuk Berbagai *Exp. Return*						
	Er	K	0.2%	0.225%	0.25%	0.275%	0.3%
w_1	-367.038	1.2944	0.5603	0.468	0.3768	0.2850	0.1933
w_2	367.037	-0.2944	0.4396	0.5314	0.6231	0.7149	0.8066
λ_1	-201.8372	0.5205					
λ_2	0.5205	-0.0017					
Total			1	1	1	1	1

w_1 melambangkan saham ASGR sedangkan w_2 melambangkan saham INCO.

Tabel 3.7
Proporsi, varian dan deviasi standar 2 saham, expected return 0,2%

Tabel G	0,2%		
E(Rp)	0,002	varian portofolio untuk exp.return	
w_1	0.560354	0.000292	0.000018
w_2	0.439646	0.000014	0.000129
σ^2	0.0000000128		
σ	0.000113		

Untuk mendapatkan nilai varian pada tabel G, H, I, J, dan K adalah dengan cara pengalian antara nilai w_1 dan w_2 yang didapat dengan nilai varian yang dicari pada awal. Contoh perhitungannya nilai w_2 pada tabel G

$$0.439646x0.000032 = 0.000014$$
$$0.439646x0.000293 = 0.000129$$

Dan nilai varian Tabel G, H, I, J, dan K adalah varian dari empat varian yang didapat dari perkalian setiap bobot terhadap varian awal saham itu sendiri.

Tabel 3.8
Proporsi, varian dan deviasi standar 2 saham, expected return 0,225%

Tabel H	0,225%		
E(Rp)	0,00225	varian portofoio untuk exp.return	
w_1	0.46859	0.000244	0.000015
w_2	0.53141	0.000017	0.000156
σ^2	0.0000000094		
σ	0.000097		

Tabel 3.9
Proporsi, Varian dan Deviasi Standar 2 Saham, Expected Return 0,25%

Tabel I	0,25%		
E(Rp)	0,0025	varian portofoio untuk exp.return	
w_1	0.37684	0.000196	0.000012
w_2	0.62316	0.000020	0.000182
σ^2	0.0000000075		
σ	0.000087		

Tabel 3.10
Proporsi, varian dan deviasi standar 2 saham, expected return 0,275%

Tabel J	0,275%		
E(Rp)	0,00275	varian portofoio untuk exp.return	
w_1	0.285076	0.000148	0.000009
w_2	0.714924	0.000023	0.000209
σ^2	0.0000000071		
σ	0.000084		

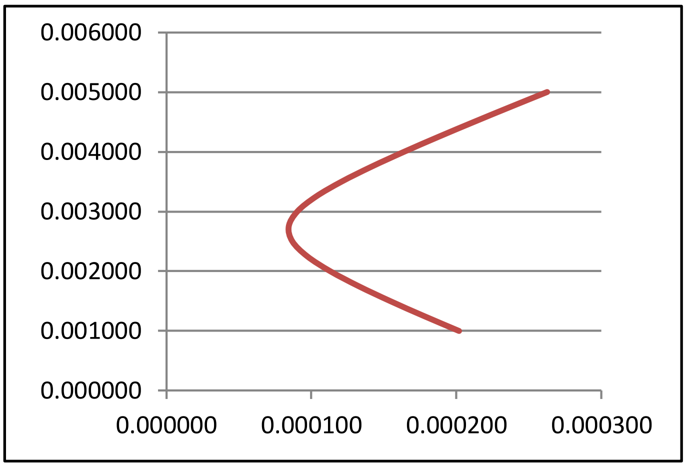
Tabel 3.11
Proporsi, varian dan deviasi standar 2 saham, expected return 0,3%

Tabel K	0,3%		
E(Rp)	0,003	varian portofoio untuk exp.return	
w_1	0.1933	0.000101	0.000032
w_2	0.8066	0.000026	0.000293
σ^2	0.000000012		
σ	0.000108		

Tabel 3.12
Expected return dan varian portofolio 2 saham

Tabel L	*Expected Return* dan Varian Portofolio					
Interval	0,025%					
E(Rp)	σ^2	σ	w_1	w_2	total	ket
0.2%	0.0000000128	0.000113	0.560354	0.439646	1	
0.225%	0.0000000094	0.000097	0.46859	0.53141	1	
0.25%	0.0000000075	0.000087	0.37684	0.62316	1	
0.275%	0.0000000071	0.000084	0.285076	0.714924	1	min
0.3%	0.000000012	0.000108	0.1933	0.8066	1	

Dari tabel 3.12 didapat bahwa return portofolio sebesar 0,275% merupakan return yang risikonya terkecil diantara return portofolio lainnya, bobot saham ASGR dengan 28,5% sedangkan saham INCO 71,5%. Kurva Hubungan Antara *Expected Return* dengan Deviasi Standar 2 jenis saham dengan Inteval Kecil, dapat dilihat pada grafik 3.1 di bawah ini



Grafik 3.1 kurva hubungan ER vs σ

Dari grafik di atas terlihat bahwa semakin besar σ maka expected return bisa semakin naik atau semakin turun. Ini menunjukan bahwa bila berinvestasi dalam bentuk portfolio saham mengharapkan keuntungan yang sangat tinggi tentunya resikonya juga tinggi. Namun dari seluruh resiko yang mungkin terjadi ada resiko yang paling kecil yang masih mungkin untuk memperoleh return yang diharapkan.

5. Kesimpulan

Beinvestasi dalam portofolio saham, expected return yang kecil tidak akan selalu memberikan deviasi standar yang minimum, dan juga tidak berlaku sebaliknya yaitu semakin kecil expected return maka semakin kecil deviasi standarnya. Namun dari setiap expected return yang diharapkan untuk masing-masing proporsi saham akan ada standar deviasi yang memberikan nilai minimum.semakin kecil expected return maka semakin kecil deviasi standarnya

Daftar Pustaka

Elton, EdwinJ. and MartinJ.Gruber (1995); *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis*, Fifth Edition, John Wiley &Sons, Inc. Toronto, Canada.

Fabozzi, Frank J. (1995); *Investment Management***,** Prentice Hall, New Jersey-USA.

Halim, Abdul. (2005); *Analisis Investasi*. Edisi ke-2. Salemba Empat. Jakarta.

InvestmentAnalysis, Fifth Edition, John Wiley &Sons, Inc. Toronto, Canada.

Jogiyanto, (2000); *Teori Portofolio dan Analisis Investasi*, Edisi Kedua, Yogyakarta, Penerbit BPFE.

Jogiyanto. (2003); *Teori Portofolio dan Analisis Investasi*, Edisi ketiga. BPFE. Yogyakarta.

Manurung, Adler Haymans. (2009); *Berani Bermain Saham Panduan Jitu Investasi di Lantai Bursa*, Buku Kompas, Jakarta.

Setya Budhi, Wono. (2001); *Kalkulus Peubah Banyak dan Penggunaannya*, ITB, Bandung.

Zubir Zalmi. (2011); *Manajemen Portofolio Penerapannya dalam Investasi*, Salemba Empat, Jakarta.