PERBANDINGAN DUA POPULASI BERDISTRIBUSI LOG-LOGISTIK UNTUK DATA YANG MENGANDUNG PENGAMATAN TIDAK TERDETEKSI

[1]Aceng Komarudin Mutaqin, [2]Abdul Kudus

[1,2] *Program Studi Statistika, Universitas Islam Bandung, Jl. Ranggamalela No. 1 Bandung 40116*

e-mail: [1]aceng.k.mutaqin@gmail.com, [2]akudus69@yahoo.com

Abstrak. *Makalah ini membahas uji perbandingan dua populasi berdistribusi log-logistik untuk data yang mengandung pengamatan tidak terdeteksi. Pengujiannya didasarkan pada perbandingan dua median dengan menggunakan uji permutasi. Data riil akan digunakan sebagai bahan aplikasi untuk metode yang diusulkan.*

Kata kunci: pengamatan tidak terdeteksi, algoritme EM, metode Newton-Raphson, uji permutasi

1. Pendahuluan

Masalah-masalah statistik yang berkaitan dengan data yang mengandung pengamatan tidak terdeteksi sangat menantang untuk diteliti. Salah satu bidang yang biasanya dihadapkan dengan data yang mengandung pengamatan tidak terdeteksi adalah bidang lingkungan. Data lingkungan seringkali memuat nilai-nilai pengamatan yang berada di bawah batas deteksi, sehingga nilai pengamatan sebenarnya tidak terdeteksi atau teramati. Biasanya pendekatan yang digunakan untuk menduga parameter populasi berdasarkan data sampel yang mengandung pengamatan tidak terdeteksi adalah metode substitusi, metode parametrik dan nonparametrik. Metode substitusi mengganti pengamatan tidak terdeteksi dengan suatu nilai yang tergantung pada batas deteksi (BD) alat ukur. Biasanya praktisi mengggantinya dengan nilai nol, BD, atau $BD/2$. Tidak ada alasan rasional mengganti pengamatan tidak terdeteksi dengan cara substitusi. Pendekatan parametrik mengasumsikan data mengikuti distribusi tertentu. Gleit (1985) dan Shumway dkk. (2002) menunjukkan bahwa pendekatan parametrik mempunyai kinerja yang buruk untuk data sampel berukuran antara 25 sampai 50. Dengan mengasumsikan data mengikuti distribusi log-logistik, Mutaqin dkk. (2013) menunjukkan bahwa metode pendugaan kemungkinan maksimum melalui algoritme EM (Ekspektasi-Maksimisasi) mempunyai kinerja yang bagus dibandingkan dengan metode substitusi ketika variansi datanya kecil. Pendekatan nonparametrik dalam kajian analisis survival telah diadopsi untuk memecahkan masalah yang dikemukakan di atas. Pendekatan ini cukup baik untuk ukuran sampel kecil (n<50) dan persentase pengamatan tidak terdeteksinya dalam tingkat yang sedang (Gilbert, 1987).

Ada beberapa penelitian yang terkait dengan masalah satu sampel yang mengandung pengamatan tidak terdeteksi, diantaranya adalah Gleit (1985), Singh dan Nocerino (2002), Zhong dkk. (2005), Helsel (2006, 2009, 2010), LeFrancois dan Poeter (2009), Kudus dan Ibrahim (2008, 2010), Mutaqin dkk. (2013), Mutaqin dan Kudus (2014a), Mutaqin dan Kudus (2014b), dan Rusthana dan Mutaqin (2014).

Nilai pengamatan yang tidak terdeteksi menjadi suatu masalah yang sulit ketika tujuannya adalah membandingkan dua populasi yang berbeda. Secara umum ada dua pendekatan yang diusulkan untuk permasalahan tersebut, yaitu pendekatan parametrik dan nonparametrik. Untuk dua data sampel dari dua populasi yang berbeda mengikuti distribusi lognormal, Stoline (1993) mengusulkan menggunakan uji kesamaan dua median untuk membandingkan dua populasi ketika data mengandung pengamatan tidak terdeteksi. Zhong dkk. (2005) menggunakan informasi fungsi kemungkinan untuk pengujiannya. Untuk kasus yang sama, uji standar seperti uji T seringkali digunakan oleh para peneliti (Zhong dkk., 2005). Sementara itu uji permutasi yang bersifat nonparametrik digunakan oleh Zhong dkk. (2005).

Selain distribusi lognormal, distribusi lain yang bisa digunakan untuk memodelkan data lingkungan adalah distribusi log-logistik (Warsono, 1996). Sampai sejauh ini belum ada penelitian yang membahas perbandingan dua populasi berdistribusi log-logistik yang data sampelnya mengandung pengamatan tidak terdeteksi. Dalam makalah ini akan diusulkan suatu metode perbandingan dua populasi berdistribusi log-logistik yang data sampelnya mengandung pengamatan tidak terdeteksi menggunakan uji permutasi. Data pengamatan tidak terdeteksinya akan diduga menggunakan algoritme EM yang dikemukakan oleh Mutaqin dkk. (2013). Sebagai bahan aplikasi akan digunakan data konsentrasi tembaga di dua area geologi di lembah San Joaquin di California (Stoline, 1993).

2. Distribusi Log-Logistik

Distribusi log-logistik adalah distribusi khusus dari distribusi log-logistik diperumum yang bentuk fungsi densitasnya adalah

$$g(x;\alpha,\beta)=\frac{\alpha}{x}\left[\frac{e^{\beta}x^{\alpha}}{(1+e^{\beta}x^{\alpha})^{2}}\right];x>0,$$

dimana $\alpha>0$ adalah parameter bentuk, dan $-\infty<\beta<\infty$ adalah parameter lokasi. Momen ke-k untuk distribusi log-logistik (Klugman dkk., 2004) di atas adalah

$$E[X^k]=e^{-k\beta/\alpha}\Gamma\left(1+\frac{k}{\alpha}\right)\Gamma\left(1-\frac{k}{\alpha}\right);\ -\alpha<k<\alpha,$$

Sedangkan fungsi distribusinya adalah

$$G(x;\alpha,\beta)=\left(\frac{e^{\beta}x^{\alpha}}{1+e^{\beta}x^{\alpha}}\right);x>0.$$

Misalkan $\gamma=\alpha$, dan $\theta=e^{-\beta/\alpha}$. Melalui parameterisasi ulang tersebut, dapat ditunjukkan dengan mudah bahwa fungsi densitas dari distribusi log-logistiknya menjadi

$$f(x;\theta,\gamma)=\frac{\gamma(x/\theta)^{\gamma}}{x[1+(x/\theta)^{\gamma}]^{2}};x>0,$$

dimana $\gamma>0$ adalah parameter bentuk, dan $\theta>0$ adalah parameter skala. Momen ke-k untuk distribusi log-logistik (Klugman dkk., 2004) di atas adalah

$$E[X^k]=\theta^{k}\Gamma\left(1+\frac{k}{\gamma}\right)\Gamma\left(1-\frac{k}{\gamma}\right);\ -\gamma<k<\gamma,$$

Sedangkan fungsi distribusinya adalah

$$F(x;\theta,\gamma)=\frac{(x/\theta)^{\gamma}}{1+(x/\theta)^{\gamma}};x>0.$$

Misalkan M adalah median dari distribusi log-logistik di atas, maka

$$F(M;\theta,\gamma)=\frac{(M/\theta)^{\gamma}}{1+(M/\theta)^{\gamma}}=0{,}5$$

$$\Leftrightarrow M=\theta.$$

Terlihat bahwa median dari distribusi log-logistik di atas adalah fungsi dari satu parameter yaitu θ. Sedangkan koefisien variasi dari distribusi log-logistik di atas adalah

$$CV=\frac{(E[X^2]-(E[X])^2)^{1/2}}{E[X]}=\frac{\left[\Gamma\left(1+\frac{2}{\gamma}\right)\Gamma\left(1-\frac{2}{\gamma}\right)-\left[\Gamma\left(1+\frac{1}{\gamma}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\right]^{2}\right]^{1/2}}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\gamma}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)}.$$

Terlihat bahwa koefisien variasi dari distribusi log-logistik di atas adalah fungsi dari satu parameter yaitu γ.

3. Pendugaan Parameter Distribusi Log-logistik Melalui Algoritme EM

Teori yang dibahas dalam bagian ini semuanya merupakan hasil dari Mutaqin dkk. (2013). Asumsikan bahwa data lingkungan berasal dari populasi yang berdistribusi log-logistik. Misalkan x_i menyatakan pengamatan terdeteksi ke-i, dengan $i = 1, 2, \cdots, n$; p menyatakan banyaknya jenis alat ukur dengan BD berbeda-beda, dan t_j menyatakan banyaknya pengamatan tidak terdeteksi untuk BD_j, dengan $j = 1, \cdots, p$.Untuk mengintegrasikan pendugaan kemungkinan maksimum dengan algoritme EM, perlu dihitung nilai ekspektasi dari $\ln(X_j)\big|X_j < BD_j$ dan $\ln(1 + e^{\beta}{X_j}^{\alpha})\big|X_j < BD_j$, untuk $j = 1, \cdots, p$. Dapat ditunjukkan bahwa untuk $j = 1, \cdots, p$, nilai ekspektasi

$$E[\ln(X_j)|X_j < BD_j] = -\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\ln\big(G(BD_j)\big)}{\alpha} + \frac{\left[\frac{1}{G(BD_j)} - 1\right]\ln\big(1 - G(BD_j)\big)}{\alpha}, \tag{1}$$

dan

$$E[\ln(1 + e^{\beta}{X_j}^{\alpha})|X_j < BD_j] = \ln\left(1 + \frac{G(BD_j)}{1 - G(BD_j)}\right) + \frac{\ln\big(1 - G(BD_j)\big)}{G(BD_j)} + 1. \tag{2}$$

Dengan demikian tahap-E dalam algoritme EM adalah mengganti $\ln\big(x_j\big)$ dan $\ln\big(1 + e^{\beta}{x_j}^{\alpha}\big)$ dalam fungsi log-kemungkinan untuk data lengkap masing-masing oleh Persamaan (1) dan (2). Misalkan $\alpha^{(r)}$ dan $\beta^{(r)}$ adalah taksiran parameter α dan β pada iterasi ke-r, tahap-M adalah memaksimumkan fungsi kemungkinan berikut untuk memperoleh taksiran parameter α dan β pada iterasi ke-$r + 1$

$$\begin{aligned} l_2(\alpha, \beta) &= n\ln(\alpha) + n\beta + (\alpha - 1)\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i) - 2\sum_{i=1}^{n}\ln\big(1 + e^{\beta}{x_i}^{\alpha}\big) \\ &+ \ln(\alpha)\sum_{j=1}^{p} t_j + \beta\sum_{j=1}^{p} t_j + (\alpha - 1)\sum_{j=1}^{p} t_j E_j^1 - 2\sum_{j=1}^{p} t_j E_j^2, \end{aligned} \tag{3}$$

dimana E_j^1 dan E_j^2 masing-masing adalah ekspektasi yang ada pada Persamaan (1) dan (2), dengan α dan β diganti oleh $\alpha^{(r)}$ dan $\beta^{(r)}$. Solusi pada tahap-M tidak dapat diperoleh secara analitik, sehingga perlu dicari menggunakan metode numerik, salah satunya adalah metode Newton-Raphson. Turunan pertama dari fungsi log-kemungkinan pada Persamaan (3) terhadap parameter α dan β masing-masing adalah

$$\frac{\partial l_2}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^{n}\ln(x_i) - 2\sum_{i=1}^{n}\frac{e^{\beta}{x_i}^{\alpha}\ln(x_i)}{1 + e^{\beta}{x_i}^{\alpha}} + \frac{1}{\alpha}\sum_{j=1}^{p} t_j + \sum_{j=1}^{p} t_j E_j^1 \tag{4}$$

dan

$$\frac{\partial E[l(\alpha, \beta)]}{\partial \beta} = n - 2\sum_{i=1}^{n}\frac{e^{\beta}{x_i}^{\alpha}}{1 + e^{\beta}{x_i}^{\alpha}} + \sum_{j=1}^{p} t_j. \tag{5}$$

Turunan kedua dari fungsi log-kemungkinan pada Persamaan (3) terhadap parameter α dan β masing-masing adalah

$$\frac{\partial^2 l_2}{\partial \alpha^2} = -\frac{n}{\alpha^2} - 2\sum_{i=1}^{n}\frac{e^{\beta}{x_i}^{\alpha}[\ln(x_i)]^2}{(1 + e^{\beta}{x_i}^{\alpha})^2} - \frac{1}{\alpha^2}\sum_{j=1}^{p} t_j, \tag{6}$$

$$\frac{\partial^2 l_2}{\partial \beta^2} = -2\sum_{i=1}^{n}\frac{e^{\beta}{x_i}^{\alpha}}{(1 + e^{\beta}{x_i}^{\alpha})^2}, \tag{7}$$

dan

$$\frac{\partial^2 l_2}{\partial \alpha \partial \beta} = -2\sum_{i=1}^{n}\frac{e^{\beta}{x_i}^{\alpha}\ln(x_i)}{(1 + e^{\beta}{x_i}^{\alpha})^2}, \tag{8}$$

Berdasarkan turunan pertama dan kedua dari fungsi log-kemungkinan di atas, dapat diperoleh penduga parameter distribusi log-logistik.

4. Kesamaan Dua Median dari Distribusi Log-logistik

Misalkan sekarang ada dua populasi berdistribusi log-logistik dengan parameter masing-masing adalah θ_1, γ_1 dan θ_2, γ_2. Misalkan juga bahwa median kedua populasi tersebut adalah M_1 dan M_2. Jelaslah bahwa kedua median tersebut dinyatakan sama ($M_1 = M_2$) ketika hipotesis $H_0: \theta_1 = \theta_2$ diterima. Interpretasi dari hipotesis ini tergantung pada apakah parameter γ_1 dan γ_2 sama atau tidak. Dengan demikian untuk uji hipotesis $H_0: \theta_1 = \theta_2$ melawan $H_1: \theta_1 \neq \theta_2$, ada dua kasus, yaitu kasus homogen ($\gamma_1 = \gamma_2$), dan kasus heterogen ($\gamma_1 \neq \gamma_2$).

Untuk kasus homogen, diasumsikan bahwa $\gamma_1 = \gamma_2$. Dalam kasus ini, rata-rata dan varians dari distribusi log-logistik untuk kedua populasi mungkin saja berbeda, tetapi koefisien variasinya sama ($CV_1 = CV_2$). Jika hipotesis $H_0: \theta_1 = \theta_2$ diterima dalam kasus homogen, maka dapat disimpulkan bahwa kedua populasi identik. Untuk kasus heterogen, diasumsikan bahwa $\gamma_1 \neq \gamma_2$. Jika hipotesis $H_0: \theta_1 = \theta_2$ diterima dalam kasus heterogen, maka hanya dapat disimpulkan bahwa kedua median populasi identik.

5. Uji Permutasi untuk Kesamaan Dua Median dari Distribusi Log-logistik

Dalam bagian ini akan diberikan tahapan pengujian hipotesis $H_0: \theta_1 = \theta_2$ melawan $H_1: \theta_1 \neq \theta_2$ menggunakan uji permutasi. Misalkan x_{11}, $\cdots$, x_{1n_1} dan x_{21}, $\cdots$, x_{2n_2} masing-masing menyatakan sampel-sampel saling bebas yang berukuran n_1 dan n_2 dari dua populasi log-logistik, $LL(\theta_1, \gamma_1)$ dan $LL(\theta_2, \gamma_2)$. Diasumsikan bahwa untuk setiap x_{ij} ada batas deteksi L_{ij}, untuk $i = 1, 2$ dan $j = 1, 2, \cdots, n_i$. Jika nilai pengamatannya terdeteksi, maka x_{ij} yang dicatat. Sedangkan jika nilai pengamatannya tidak terdeteksi ($< L_{ij}$), maka L_{ij} yang dicatat (tersensor kiri). Misalkan untuk sampel i ada r_i pengamatan yang terdeteksi, sisanya $n_i - r_i$ pengamatan tidak terdeteksi.

Tahapan uji permutasi untuk hipotesis $H_0: \theta_1 = \theta_2$ melawan $H_1: \theta_1 \neq \theta_2$ adalah sebagai berikut:

(1) Menghitung penduga parameter θ_1 dan θ_2, yaitu $\hat{\theta}_1$ dan $\hat{\theta}_2$ berdasarkan data (x_{ij}, L_{ij}; $i = 1, 2$ dan $j = 1, 2, \cdots, n_i$).

(2) Menghitung $\hat{\theta} = \hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_2$.

(3) Mengambil sampel permutasi. Gabungkan data pengamatan yang terdeteksi dari sampel 1 dan 2, sehingga terbentuk data gabungan $X = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = (x_{11}, \cdots, x_{1r_1}, x_{21}, \cdots, x_{2r_2})$ untuk pengamatan yang terdeteksi berukuran $r = r_1 + r_2$. Gabungkan juga data pengamatan yang tidak terdeteksi dari sampel 1 dan 2, sehingga terbentuk data gabungan $L = (\boldsymbol{L}_1, \boldsymbol{L}_2) = (L_{1r_1+1}, \cdots, L_{1n_1}, L_{2r_2+1}, \cdots, L_{2n_2})$ untuk pengamatan yang tidak terdeteksi berukuran $s = n_1 + n_2 - (r_1 + r_2)$. Mengambil sampel acak berukuran r_1 tanpa pengembalian dari X, sebut saja sampel tersebut adalah $\boldsymbol{x}_1^*$. Sisanya yang tidak terambil dari X didefinisikan sebagai sampel $\boldsymbol{x}_2^*$. Kemudian mengambil sampel acak berukuran $n_1 - r_1$ tanpa pengembalian dari L, sebut saja sampel tersebut adalah $\boldsymbol{L}_1^*$. Sisanya yang tidak terambil dari L didefinisikan sebagai sampel $\boldsymbol{L}_2^*$.

(4) Menghitung penduga parameter θ_1 dan θ_2, yaitu $\hat{\theta}_1^*$ dan $\hat{\theta}_2^*$ berdasarkan sampel permutasi $(\boldsymbol{x}_1^*, \boldsymbol{L}_1^*)$ dan $(\boldsymbol{x}_2^*, \boldsymbol{L}_2^*)$.

(5) Menghitung $\hat{\theta}^* = \hat{\theta}_1^* - \hat{\theta}_2^*$.

(6) Mengulang langkah (3) sampai (5) sebanyak M kali, sehingga diperoleh $\hat{\theta}^*$ sebanyak M buah.

(7) Menghitung ASL. Untuk uji dua pihak, yaitu proporsi banyaknya $|\hat{\theta}^*|$ yang nilainya lebih besar dari $|\hat{\theta}|$.

(8) Memutuskan apakah hipotesis nol diterima atau ditolak. Hipotesis nol diterima apabila nilai ASL lebih besar dari taraf arti (α) pengujian yang ditetapkan.

6. Aplikasi

Data konsentrasi tembaga di dua area geologi di lembah San Joaquin di California (Stoline, 1993) digunakan untuk mengaplikasikan metode yang diusulkan dalam penelitian ini. Datanya disajikan dalam Tabel 1. dalam Tabel 1 terlihat ada nilai pengamatan <1, <2, <5 dan seterusnya. Ini menunjukkan nilai pengamatan yang tidak terdetaksi, yang nilainya kurang dari batas deteksi alat ukur yang digunakan. Contohnya untuk nilai pengamatan <1, artinya batas deteksi alat ukurnya adalah 1, namun nilai pengamatannya kurang dari 1, sehingga nilai pengamatannya ditulis <1. Begitu untuk nilai yang lainnya. Untuk konsentrasi tembaga di Alluvial Fan Zone, terlihat bahwa ada 4 pengamatan yang nilainya <1, ada 8 pengamatan yang nilainya <5, dan seterusnya. Begitu juga untuk konsentrasi tembaga di Basin-Trough Zone, terlihat ada 2 pengamatan yang nilainya <1, ada 2 pengamatan yang nilainya <2, dan seterusnya. Dengan demikian ada 17 pengamatan yang tidak terdeteksi untuk konsentrasi tembaga di Alluvial Fan Zone, dan ada 14 pengamatan yang tidak terdeteksi untuk konsentrasi tembaga di Basin-Trough Zone.

Diasumsikan bahwa data kedua sampel tersebut masing-masing berasal dari populasi yang berdistribusi log-logistik. Dengan menggunakan perangkat lunak Matlab, hasil pengujian menunjukkan bahwa nilai ASL-nya adalah 0,766. Nilai ini lebih besar dari taraf signifikansi, $\alpha = 5\%$, sehingga hipotesis nol diterima dan disimpulkan bahwa median konsentrasi tembaga di dua area geologi di lembah San Joaquin di California adalah sama.

Tabel 1
Konsentrasi Tembaga di Dua Area di lembah San Joaquin, California

Alluvial Fan Zone		Basin-Trough Zone	
Konsentrasi	Frekuensi	Konsentrasi	Frekuensi
<1	4	<1	2
<5	8	<2	2
<10	3	<5	5
<20	2	<10	4
1	5	<15	1
2	21	1	7
3	6	2	4
4	3	3	8
5	3	4	5
7	3	5	1
8	1	6	2
9	1	8	1
10	1	9	2
11	1	12	1
12	1	14	1
16	1	15	1
20	1	17	1
	65	23	1
			49

7. Kesimpulan

Kesimpulan dari penelitian ini adalah:

1. Telah dirumuskan metode uji permutasi untuk membandingkan dua populasi berdistribusi log-logistik yang data sampelnya mengandung pengamatan tidak terdeteksi. Dalam penelitian ini yang diuji adalah kesamaan median kedua populasi tersebut.
2. Hasil penerapan metode yang diusulkan pada data konsentrasi tembaga di dua area geologi di lembah San Joaquin di California menunjukkan bahwa median konsentrasi tembaga di dua area geologi di lembah San Joaquin di California adalah sama.

Daftar Pustaka

Gilbert, R.O. (1987). *Statistical Method for Environmental Pollution Monitoring*. Wiley, New York.

Gleit, A. (1985). Estimation for small normal data sets with detection limits. *Environmental Science and Technology*, Vol. 19, 1201-1206.

Helsel, D. R., (2006), Fabricating data: How substituting values for nondetects can ruin results, and what can be done about it, *Chemosphere* 65, 2434–2439.

Helsel, D. R., (2009), Summing Nondetects: Incorporating Low-Level Contaminants in Risk Assessment, *Integrated Environmental Assessment and Management* 6(3), 361-366.

Helsel, D. R., (2010), Much Ado About Next to Nothing: Incorporating Nondetects in Science, *Ann. Occup. Hyg.* 54(3), 257–262.

Klugman, S. A., Panjer, H. H., dan Willmot, G. E. (2004). *Loss Models: From Data to Decisions*. Edisi kedua, Wiley, New York.

Kudus, A., dan Ibrahim, N. A., (2008), Method for Accommodation of Nondetect (Left-censored) Data, makalah yang dipresentasikan pada *Seminar on Survival Studies*, Kuala Lumpur, November 25, 2008.

Kudus, A., dan Ibrahim, N. A., (2010), Piecewise Exponential Estimator of Exceedance Probability of Environmental Data Subject to Limits of Detection. *Extended Abstract book of Symposium of Mathematics, Fundamental Science Congress*, 18 –19 May 2010,13-15.

LeFrancois, M., dan Poeter, E., (2009), Use of Observations Below Detection Limit for Model Calibration, Ground Water, 228–236.

Mutaqin, A.K., Kudus, A. (2014a). Penurunan Ekspektasi Bersyarat dari Distribusi Log-logistik. *Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Statistika*, Universitas Tanjungpura, 27 Februari 2014.

Mutaqin, A.K., Kudus, A. (2014b). Pembangkitan Data dari Distribusi Log-logistik. *Jurnal Statistika: Forum Teori dan Aplikasi Statistika*, Vol. 14 No. 2, November 2014.

Mutaqin, A.K., Kudus, A., Safitri, F.T. (2013). Pendugaan Parameter Distribusi Log-Logistik untuk Data yang Mengandung Pengamatan Tidak Terdeteksi. *Prosiding Seminar Nasional Teknik Industri*, Universitas Malikussaleh, 28-29 Agustus 2013.

Rusthana, D.J., Mutaqin, A.K. (2014). Penaksiran Rata-rata dan Varians dari Distribusi Lognormal pada Data Sampel yang Mengandung Pengamatan Tidak Terdeteksi. *Prosiding Seminar Nasional Statistika, Matematika, dan Aplikasinya*, Fakultas MIPA Unisba, 26 Agustus 2014.

Shumway, R. H., Azari, R. S. dan Kayhanian M. (2002). Statistical approaches to estimating mean water quality concentrations with detection limits. *Environ. Sci. Technol*, 36, 3345-3353.

Singh, A., dan Nocerino, J., (2002), Robust estimation of mean and variance using environmental datasets with below detection limit observation, *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems* 60, 69– 86.

Stoline, M.R. (1993). Comparison of Two Medians Using A Two-Sample Lognormal Model in Environmental Contexts. *Environmetrics*, Vol. 4, No. 3, 323-339.

Warsono. (1996). Analysis of Environmental Pollutant Data Using Generalized Log-logistic Distribution. *Dissertation at University of Alabama at Birmingham*.

Zhong, W., Shukla, R., Succop, P. Levin, L., Welge, J., dan Sivaganesan, S. (2005). Statistical Approaches to Analyze Censored Data with Multiple Detection Limits. *Disertasi Program Doctor of Philosophy University of Cincinnati*.